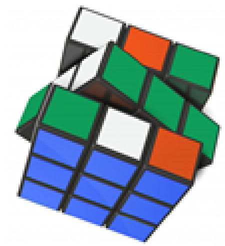




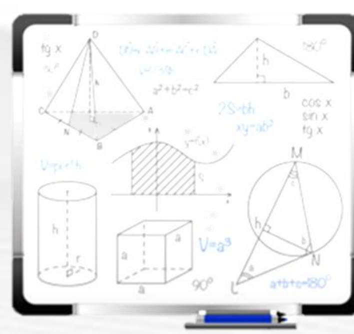
MATEMÁTICA

Lógica, Crítica y Creativa en el Nivel Secundario










MATEMÁTICA
Lógica, Crítica y Creativa en el Nivel Secundario

Autores:

Alejandro Rosario Morel.

Aury Mariely Gil González.

Doraliz Báez.

Emelanio de Jesús Jiménez Torres.

Esmeralda Yasmin Rosario Paulino.

Gisette Valerio Cabrera.

Josayda Stephany Jerez Reyes.

Jasón Miguel Hernández Castillo.

Joan Manuel Núñez Rodríguez.

Luis Emilio Paulino Sánchez.

Marlin Ventura Almonte.

Martín Salvador Hiciano Lantigua.

Nicole Brito González.

Pedro Nolasco Muñoz Lora.

Rina Elizabeth Mieses.

Rosa Idalia Tavares Reyes.

Víctor Manuel Batista Santos.

Yenny Tereza del Carmen Figueroa González.

Yarileidy del Carmen Ortega Ureña.

Maestros acompañantes:

MA. Nelson Gómez López

DRA. Esther María Morales Urbina

Director:

M.A. Pedro Emilio Ventura

Índice General

Introducción
Contenido

UNIDAD I
PROBLEMAS DE RAZONAMIENTO LÓGICO

UNIDAD II
PROBLEMAS DE RAZONAMIENTO DEDUCTIVO E INDUCTIVO

UNIDAD III
CONJUNTOS Y SUS ELEMENTOS

UNIDAD IV
PROBLEMAS CON EXPRESIONES ALGEBRAICAS

UNIDAD V
PROBLEMAS UTILIZANDO PERÍMETROS Y ÁREAS CON FIGURAS GEOMÉTRICAS

UNIDAD VI
EL TEOREMA DE PITÁGORAS Y LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

UNIDAD VII
PROBLEMAS DE ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD

UN COMPROMISO DE TODOS

El sistema educativo dominicano viene enfrentando serias falencias en cuanto al desarrollo de las competencias matemáticas que deben evidenciar los estudiantes en los primeros grados de escolaridad. Las pruebas de medición internaciones sitúan al país en lugares poco halagüeños.

Llama a la atención que a pesar de los esfuerzos e inversión que se hacen para lograr mejores resultados, el problema parece ser indeleble. El pensamiento lógico, la capacidad crítica y las habilidades creativas son ineludibles para responder a los problemas que a diarios enfrentan las personas, sin importar su edad o nivel de escolaridad.

En la Universidad preocupa el bajo nivel con que llegan los bachilleres, en cuanto a las competencias matemáticas. Esto muchas veces se convierte en un factor determinante para lograr una carrera profesional, ya que la reprobación constante de las primeras asignaturas, llena de desánimo a los estudiantes, presentándoles la deserción como camino rápido.

Es una problemática que afecta a gran parte de la población estudiantil en todos los niveles. Esta preocupación motiva el presente proyecto del Curso Final de Grado con los participantes de la Licenciatura en Educación, mención Matemática-Física. La propuesta busca explicar, desde el lenguaje y perspectiva de los estudiantes, el desarrollo de habilidades de pensamiento lógico, crítico y creativo en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas del Nivel Secundario.

Saludamos la iniciativa de emprender un proyecto retador que termina con la creación de un texto didáctico que ayudará los docentes y estudiantes a comprender los fundamentos y estrategias para desarrollar las habilidades de pensamiento de la perspectiva básica, analítica, crítica, lógica y creativa. Es un compromiso de todos, enfrentar desde las bases formativas, el desarrollo del pensamiento matemático y dejar de lado la fobia a esta área del conocimiento.

Pedro Emilio Ventura

Director del Departamento de Curso Final de Grado

PRESENTACIÓN

El texto Matemática Lógica, Crítica y Creativa en el Nivel Secundario, es una producción de los participantes del curso final de grado de la Licenciatura en Educación, mención Matemática-Física de la Universidad Abierta para Adultos. El propósito del mismo es colaborar con el proceso de enseñanza de las matemáticas.

El libro está estructurado por 7 unidades, correspondientes al currículo del Nivel Secundario, las cuales responden según las indagatorias de los participantes involucrados, a las necesidades básicas del aprendizaje de los estudiantes de dicho Nivel. Cada unidad desarrolla teorías, definiciones, cuestiones de razonamientos, aplicaciones a la realidad, resolución de problemas, esquema de resumen, ejercicio de autoevaluación, actividades complementarias y la bibliografía consultada.

La Matemática debe ser un instrumento apropiado, con un lenguaje adecuado que permita analizar, describir, resolver, aplicar y simplificar problemas del mundo real o de la vida diaria, por tanto, este material busca ser parte de ese instrumento didáctico, que refuerce y permee el aprendizaje de los estudiantes.

Agradezco el apoyo, ánimo e interés de todos los involucrados en este proceso, ya que fue elaborado con mucho esfuerzo por 19 participantes, que pensaron como arquitectos de la educación, para presentar nuevas alternativas de enseñar matemática en el ejercicio profesional. Distinguidos autores, el arte supremo del maestro consiste en despertar el goce de la expresión creativa y del conocimiento, muchas felicidades por este gran trabajo y dejen huellas positivas para la eternidad.

Nelson Gómez López
Maestro Acompañante del Curso Final de Grado

INTRODUCCIÓN

Una gran parte de los estudiantes de hoy en día, les cuesta mucho sentirse atraído por las matemáticas, ya que algunos docentes de los diferentes centros educativos, utilizan aún la forma tradicional de enseñar, provocando el desinterés por partes de los estudiantes en adquirir los conocimientos matemáticos que les hacen falta para aplícalos en el día a día y para resolver problemas que se les presentan en el diario vivir. Becando propuesta a esta problemática de aprendizaje se creó el texto Matemática Lógica, Crítica y Creativa en el Nivel Secundario.

Los contenidos y los problemas planteados en esta propuesta han sido elegidos de forma minuciosa y adaptados a la realidad, con la finalidad de despertar el interés de los estudiantes en conocer sus aplicaciones en su contexto inmediato, y su solución correspondiente.

El desarrollo de las unidades permitirá a los estudiantes prepararse de forma autónoma, ya que este fue diseñado con la intención y el propósito de que estos puedan desarrollar sus capacidades cognitivas, edificadas en la dimensión del pensamiento lógico, crítico y creativo.

Los temas desarrollados son: El Razonamiento Lógico, El Razonamiento Inductivo y Deductivo, Los Conjuntos Numéricos, Expresiones Algebraicas, Perímetro, longitud y área de figuras geométricas planas. También se desarrollan las Razones Trigonométricas, La probabilidad y el azar, los cuales están enfocados a diferentes situaciones del diario vivir.

En fin, con esta presentación didáctica, se busca aportar elementos positivos al aprendizaje de los estudiantes, y al quehacer profesional de los docentes.

UNIDAD I

PROBLEMAS DE RAZONAMIENTO LÓGICO

Autores

Jasón Miguel Hernández

Josayda Jerez

Gisette Valerio

ORIENTACIONES PARA EL ESTUDIO DE LA UNIDAD I

En esta unidad, se muestra una propuesta didáctica para favorecer el aprendizaje mediante problemas de ¨Razonamiento Lógico¨.

Los problemas planteados en esta proposición, han sido elegidos de forma minuciosa y adaptada a la realidad, con la finalidad de despertar el interés de los estudiantes en conocer problemas que involucren el pensamiento lógico matemático.

En cuanto a la resolución de problemas, estos se pueden realizar no necesariamente llevando un procedimiento específico, sino que dependiendo de las capacidades que tenga el receptor, puede encontrarle distintas maneras para su desarrollo.

Las habilidades del pensamiento demandan ejercitarse a lo largo de todo el proceso de enseñanza aprendizaje, es por esto que tanto para el educador como para el estudiante es importante conocer estos procesos del pensamiento y deben saber cómo poder potenciarlos.

COMPETENCIAS DE LA UNIDAD I

- Diseña una propuesta didáctica en el área de matemática que favorezca el aprendizaje utilizando el razonamiento lógico matemático, basado en la resolución problemas cotidianos.
- Identifica técnicas para resolver problemas que les sean útiles en la vida diaria.
- Relaciona conocimientos matemáticos para resolver problemas y operaciones en el campo de la vida cotidiana.
- Adquisición de la competencia usando el desarrollo cognitivo del razonamiento lógico matemático.
- Usa la matemática divertida para motivar el aprendizaje en los estudiantes.
- Aplica métodos de resolución de problemas para dar respuestas a situaciones problemáticas en diferentes contextos.
- Aplica modelos gráficos para la comprensión y resolución problemas matemático
- Aplica bloques lógicos para estimular y desarrollar el aprendizaje matemático.

ESQUEMA DE CONTENIDO DE LA UNIDAD I

CONTENIDO DE LA UNIDAD I

1.1 Razonamiento Lógico

Se entiende por razonamiento a la facultad que permite resolver problemas, extraer conclusiones y aprender de manera consciente de los hechos, estableciendo conexiones causales y lógicas necesarias entre ellos. Es decir, lo conocemos como razonar es pensar, ordenando ideas en la mente, para llegar a deducir una consecuencia o conclusión.

La lógica es el estudio del pensamiento humano partiendo de su forma, estructura y las relaciones entre sus diferentes elementos; la lógica estudia el proceso que sigue el pensamiento en su formación y desarrollo, las reglas, principios y las leyes necesarias para lograr conclusiones válidas y distinguir, en consecuencia, el razonamiento correcto e incorrecto.

El surgimiento de la lógica se produce en la antigua Grecia como instrumento de ayuda al razonamiento humano en las distintas disciplinas que en ese momento comenzaban a conformar las diferentes áreas de la ciencia, como la física, la química, la astronomía y otros.

La lógica trata de los métodos, reglas, técnicas y formas del razonamiento que ayuda a determinar la validez de un argumento. En el siglo XIX el matemático George Boole, basado en la lógica, crea la lógica matemática.

El razonamiento lógico o causal es un proceso de lógica mediante el cual, partiendo de uno o más juicios, se deriva la validez, la posibilidad o la falsedad de otro juicio distinto. El estudio de los argumentos corresponde a la lógica, de modo que a ella también le corresponde indirectamente el estudio del razonamiento. Por lo general, los juicios en que se basa un razonamiento expresan conocimientos ya adquiridos o, por lo menos, postulados como hipótesis. Es posible distinguir entre varios tipos de razonamiento lógico.

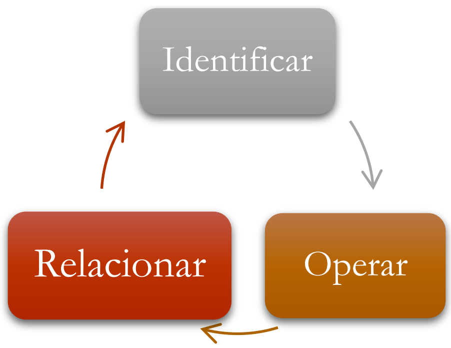
El razonamiento lógico matemático es una habilidad y capacidad relacionada con la forma abstracta de ver los números o cantidades y poder realizar operaciones con ellas.

La mayoría de los estudiantes van desarrollando razonamiento lógico acorde a su edad, aunque no todos desarrollan completamente la habilidad y requieren de su propio ritmo sin que sea ningún tipo de problema.

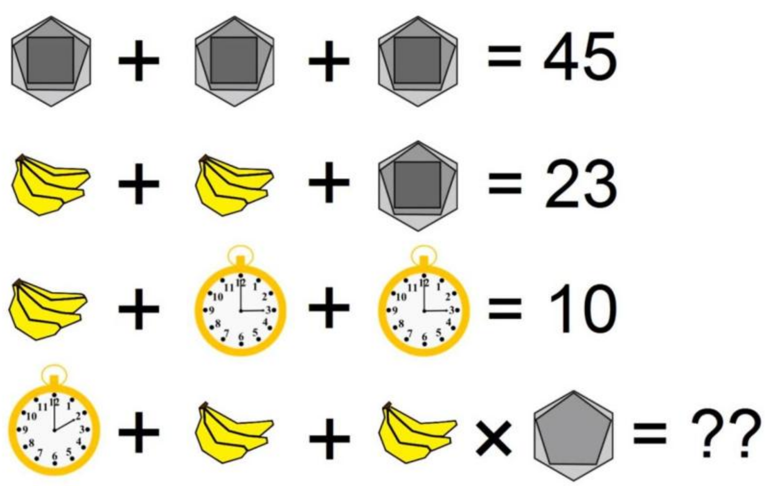
El razonamiento matemático no requiere un tiempo establecido, es recomendable su desarrollo y aprendizaje durante la etapa de educación primaria 6-12 años, especialmente en el área de aritmética.

1.1.2 Capacidades del razonamiento lógico matemático

En la ejecución del pensamiento lógico, se deben de tomar en cuenta los siguientes aspectos.



Ejemplo: en la siguiente aplicación se muestran los aspectos del pensamiento lógico.



1.1.3 Método de estimulación de habilidades de razonamiento lógico y matemático

- **Construye:** utilizar juegos para que el estudiante esté en capacidad de organizar sus pensamientos, asimilar conceptos de forma, color tamaño y grosor, además de otras actividades relacionadas como seleccionar, comparar, clasificar y ordenar.

- **Compara y clasifica:** aprovechar ejemplos de la vida real, visita al supermercado, para el desarrollo de la habilidad numérica y razonada de las matemáticas.

- **Explica sobre la vida cotidiana**: explicar las transformaciones de materia como el agua de liquida a vapor y otros efectos del quehacer diario.

- **Organización del ambiente adecuado:** contribuyendo siempre con la concentración.

- **Uso de juegos de memoria:** son un grupo de juegos que te pueden ayudar a estimular el pensamiento memorístico que hay que combinar con otros para lograr un razonamiento lógico adecuado.

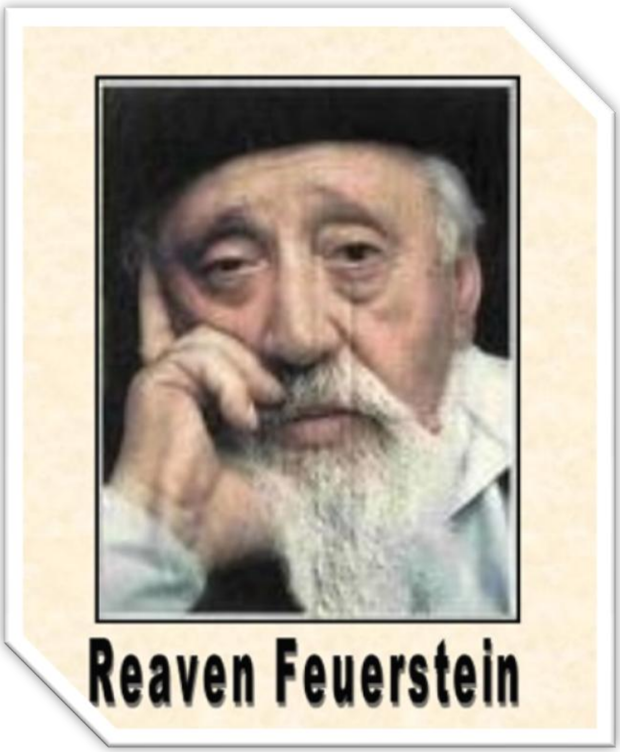
- **Planteamiento de problemas:** motivación al reto, soluciona, resuelve y ejercita sobre una situación en particular, la problemática debe estar adecuada a la edad de los estudiantes debido a que no se deben colocar retos que, por edad, el estudiante no pueda alcanzar.

- **Estudiantes Reflexivo**: inventar situación que el estudiante pueda ir solucionando paso a paso, que invite a la reflexión lógica de los problemas

- **Manipulación de números y cantidades**: el estudiante debe aprender a realizar las operaciones básicas y sus reglas de uso, tablas y todas las herramientas que requiera usar para resolver situaciones problemáticas.

- **Uso de recetas de cocina:** elige un momento en la escuela o en el hogar la preparación de un pastel o postre para que los estudiantes aprendan a manejar las unidades de medida a sumar a restar y otras técnicas que pongan a prueba sus habilidades lógico matemáticas.

La exposición directa del organismo a la estimulación según el Dr. Feuerstein.



El organismo en crecimiento es dotado por características psicológicas determinadas genéticamente, pero al estar expuesto directamente a los estímulos, se modifica a lo largo de su vida.

Estos estímulos, los cuales son percibidos y registrados por el organismo, modifican la naturaleza de la integración del mismo y según la naturaleza, intensidad, y complejidad de dicho estimulo, de manera que cuando más novedoso sea y más fuerte la experiencia, mayor será el afecto en la conducta cognitiva, afectiva y emocional.

Operaciones mentales

Feuerstein define las funciones mentales como “conjunto de acciones interiorizadas, organizadas y coordinadas, por las cuales se elaboran la información procedente de las fuentes internas y externas de estimulación”.

Las operaciones mentales, se van construyendo de a poco, de las más simples a las más complejas, unidas en forma coherente logran la estructura mental del sujeto, lo que es posible gracias a la mediación.

Las cuales son:

- **Razonamiento lógico** el pensamiento formal “es la representación de una representación de acciones posibles”; se llega a la verdad lógica gracias al razonamiento diferencial, hipotético, transitivo o silogístico.
- **Pensamiento divergente** equivale al pensamiento creativo, es la capacidad de establecer nuevas relaciones sobre lo que ya se conoce, de modo que se realicen nuevas ideas. El pensamiento convergente es riguroso respecto a la exactitud de los datos, el pensamiento divergente es flexible y busca la novedad.
- **Razonamiento silogístico** trata de la lógica formal proposicional. Permite el pensamiento lógico ayudándose de leyes para ser más lógicos y para este tipo de razonamiento nada es imposible; puede codificar y decodificar modelos mentales.
- **Razonamiento transitivo** corresponde al pensamiento lógico formal. Ordena, compara y describe una situación de manera que se pueda llegar a una conclusión. Es deductivo y permite inferir nuevas relaciones a partir de las existentes surgiendo implicaciones y equivalencias.

Pasos para lograr competencias del razonamiento lógico matemático:

- Lo primero es contar con conocimiento de técnicas para la solución de problemas.

- Iniciar el desarrollo de su creatividad y curiosidad, iniciativa y reflexión, utilizando la técnica de tanteo y reflexión.

- Hacer una relación de los conocimientos matemáticos adquiridos con operaciones de lógica y razonamiento.

- Contribuir a su desarrollo cognitivo por medio del razonamiento lógico matemático.

- Uso de los juegos, ya que motivan a los estudiantes en su aprendizaje de las matemáticas.

- Practicar y dominar métodos para la solución de problemas.

- Utilizar modelos gráficos para la comprensión del problema matemático y su método de solución.

- Uso de los bloques lógicos para estimular y desarrollar el pensamiento lógico matemático.

1.1.4 Resolución de problemas

1. **Julio, Susana y María se encuentran charlando sentados alrededor de una mesa circular. Susana no está a la derecha de María. ¿Quién está a la derecha de Julio?**

Según los datos de la problemática en la descripción decía que estaban sentados alrededor de una mesa circular, pero Susana no estaba a la derecha de María, por tanto, quien está a la derecha de Julio es Susana.

2. **Acaba este cuadrado numérico para que sea mágica, es decir, tienes que conseguir que cada fila, cada columna, las dos diagonales sumen lo mismo.**

	14	
		8
	6	13

PASO 1

Para resolver los cuadrados mágicos es necesario tener presente un orden, por tanto, hay que tomar el número mayor y colocarlo de manera descendentes.

14,13,12,11,10,9,8,7,6.

PASO 2

Luego debes de colocarlo de manera ascendente.

6,7,8,9,10,11,12,13,14.

PASO 3

Proceda a sumar y dividir entre 3, ya que es un cuadro 3x3 el cual se está resolviendo.

$$6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 = 90$$

$$\frac{90}{3} = 30$$

Al conocer el total de las columnas, filas y diagonales como resultado final debe ser 30.

PASO 4

Procede a colocar los números en el siguiente orden.

En el centro se coloca la mediana que en este caso es el 10.

6,7,8,9,10,11,12,13,14

	14	
	10	8
		13

PASO 5

Coloque los números impares en las esquinas.

7	14	9
	10	8
11		13

PASO 6

Procede a colocar los números pares en los medios, teniendo en cuenta que la suma de sus filas y columnas los resultados deben ser 30.

7	14	9
12	10	8
11	6	13

3. La jornada de trabajo es de 8 horas, y el pago por hora es de $90.00 pesos ¿Cuánto recibe un obrero si labora 20 días completos y 10 días medio tiempo?

1 hora = 90 pesos **1 día laboral = 720 pesos**

8 horas = 720 pesos **20 días = 14,400 pesos**

10 días = 7,200 pesos

½ tiempo = 3,600 pesos

$$\mathbf{14,400 + 3,600 \ = 18,000} \ \boldsymbol{pesos}$$

4. **La maestra Mary tiene un grupo de estudiantes que la suma de las niñas con el de los estudiantes es de 40 y su diferencia es 10 por lo tanto el grupo tiene:**

Condición: La suma de total es 40 y la resta entre estudiantes y niñas debe ser 10.

Total de estudiantes = 40

25 niñas – 15niños = 10

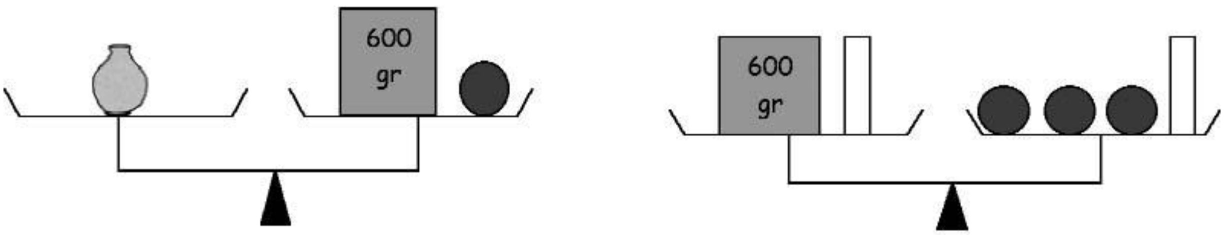
25 niñas

15 niños

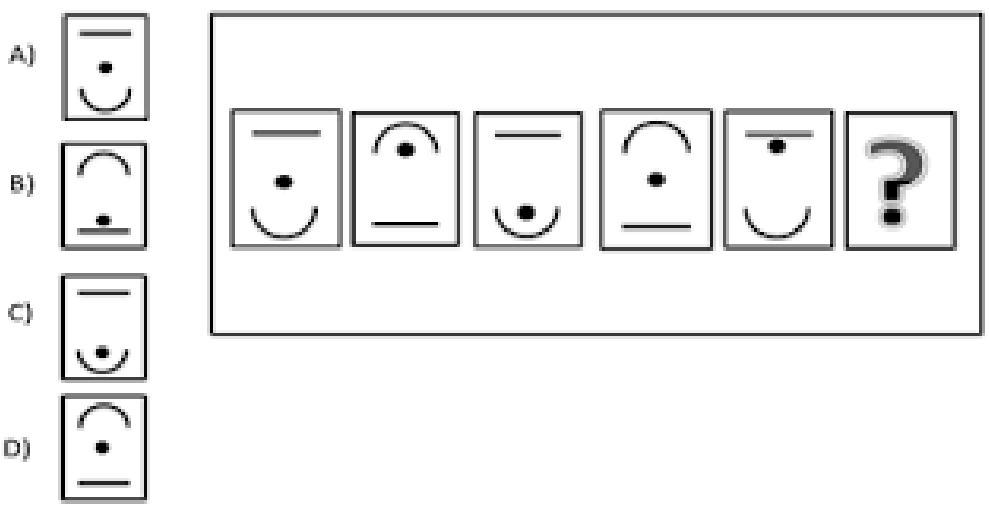
5. Balanzas de dos brazos

Problemas gráficos en los que una vez representadas algunas "pesadas" realizadas, se trata de averiguar otras equivalencias en función de los objetos utilizados.

Ejemplo: Observa la balanza y deduce el peso de la jarra



6. Observe y seleccione la respuesta que completa el problema, ¿Quién ha de sustituir el signo de interrogación?



Luego de observar y analizar el problema, la imagen que sustituirá el signo de interrogación es la D, puesto que se puede observar la secuencia que hay entre los puntos y este es quien lo completa.

RESUMEN DE LA UNIDAD I

El razonamiento lógico permite la estructuración y organización de las ideas para de este modo llegar a una conclusión, las habilidades del razonamiento lógico se pueden estimular mediante la construcción, de este modo el estudiante será capaz de organizar su pensamiento asimilar, comparar y clasificar y a su vez relacionar dichos problemas con la vida diaria.

Es importante diseñar actividades para tener un resultado eficaz a la hora de desarrollar la metodología que les ayuden al desarrollo lógico matemático, ya que muchos estudiantes presenten dificultades en el área de matemática.

En esta unidad se establece que el razonamiento lógico es una habilidad que tienen los seres humanos para aplicar procesos de abstracción a números o cantidades y posteriormente para realizar una serie de operaciones que brindan solución a una discrepancia entre una situación real y una situación deseada. En las matemáticas es la capacidad que se tiene, o no, de mirar los números, entenderlos y saber cómo poder hacer operaciones con ellos. La mayoría de los estudiantes van desarrollando poco a poco la habilidad, de acuerdo a sus capacidades y ritmo de aprendizaje.

ACTIVIDADES DE LA UNIDAD I

Luego de analizar cuales aspectos deben tomarse en cuenta para la resolución de problemas en el razonamiento lógico, nos enfocaremos en ejercitar lo aprendido haciendo énfasis en algunos problemas, por tanto, deberán ser aplicados los conocimientos básicos y hasta llegar a una respuesta satisfactoria.

1-Cierto examen Rosa obtuvo menos puntos que María, Laura menos puntos que Lucía, Noemí el mismo puntaje que Sara; Rosa más que Sofía; Laura el mismo puntaje que María y Noemí más que Lucía. ¿Quién obtuvo menos puntaje?

A) Laura

B) María

C)Rosa

D)Sofía

E)Sara

Juan es el doble de rápido que Ángel y este dos veces más rápido que Omar. Para realizar una obra trabajaron durante 3 horas al término de las cuales se retira Omar los otros culminan la Obra en 5 horas más de trabajo. ¿Cuántas horas emplearía Omar en realizar 1/3 de la Obra?

A) 30

B) 10

C) 20

D) 15

E) 25

EJERCICIOS DE AUTOEVALUACIÓN UNIDAD I

Ejercicio 01

Se le pregunta la hora a un señor y esta contesta: "Dentro de 20 minutos mi reloj marcará las 10 y 32". Si el reloj está adelantado de la hora real 5 minutos, ¿qué hora fue hace 10 minutos exactamente?

A) 10:10 minutos

B) 10:07 minutos

C) 10:12 minutos

D) 9:50 minutos

E) 9:57 minutos

Ejercicio02

Lucía fue al médico, éste le recetó tomar 4 pastillas, una pastilla cada 6 horas, ¿En qué tiempo podrá terminar de tomar todas las pastillas?

A) 28 horas

B) 24 horas

C) 20 horas

D) 18 horas

E) 32 horas

Ejercicio03

En una ferretería tienen un stock de 84m de alambre, y diario cortan 7m. ¿En cuántos días habrán cortado todo el alambre?

A) 13
B) 12
C) 11
D) 10
E) 09

Ejercicio04

En una habitación hay 11 pelotas amarillas, 13 azules y 17 verdes. Si se le pide a un ciego sacar las pelotas, ¿cuál es el mínimo número de pelotas que debe extraer para que obtenga con total seguridad 11 pelotas del mismo color?

A) 24
B) 11
C) 28
D) 31
E) 30

Ejercicio05

En una caja grande hay 6 cajas, dentro de cada una de estas cajas hay 3 cajas, dentro de estas hay 2 cajas. ¿Cuántas cajas hay en total?

A) 36
B) 18
C) 51
D) 61
E) N.A.

BIBLIOGRAFÍA DE LA UNIDAD I

1. Barwise, J. (1977). Libro de Mano de Matemática Lógica, North Holland, Ámsterdam.
2. Hamilton, A. G. (1981). Lógica para Matemáticos, Paraninfo, Madrid, España.
3. Kleene, S. C. (1974). Introducción a la Metamatemática, Tecnos, Madrid.
4. Lógica Matemáticahttps://brainly.lat/tarea/2740631Fecha de acceso 22/11/2019.
5. Mosterín, J. (1970). Lógica de Primer Orden, Ariel, Barcelona, España.
6. Peña, R. (fecha). Matemática educación media. Basado en transformaciones curricular de la educación nacional, capítulo I (quinta edición del siglo XXI) República Dominicana.
7. Peña, R. (2004-2008).Matemática IV educación media página 359.República Dominicana.
8. Razonamiento Lógico, Lógica Matemática https://razonamiento-logico.webnode.es/logica-matemática/ Fecha de acceso 22/11/2019.
9. Razonamiento Lógico Matemático http://razonamiento-logico-problemas.blogspot.com/2013/02/test-02-razonamiento-logico-matematico.htmlFecha de acceso 22/11/2019.

UNIDAD II

Lógica de Razonamiento Inductivo y Deductivo

Autores

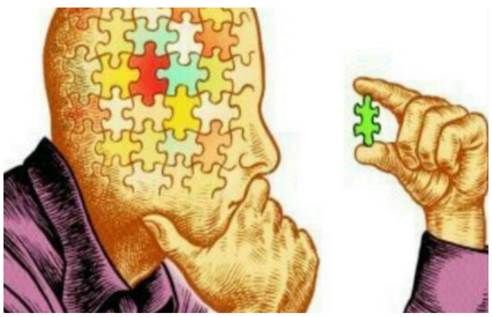
Pedro Muñoz

Luis Paulino

Joan Núñez

ORIENTACIONES PARA EL ESTUDIO DE LA UNIDAD II

2. Lógica de Razonamiento Inductivo y Deductivo



Esta unidad suministrara una propuesta didáctica que busca apoyar el proceso de enseñanza aprendizaje en el área de las matemáticas, enfocándose en problemas de razonamiento inductivo y deductivo que desarrollen el pensamiento lógico, crítico y creativo del ser humano. Esto permitirá desarrollar habilidades en la formulación y solución de problemas y puedan llegar a conclusiones a través de un razonamiento inductivo y deductivo, acordes con la exigencia del nivel.

No obstante, se debe recordar que el método inductivo como el deductivo son estrategias de razonamiento lógico, siendo que el inductivo utiliza premisas particulares para llegar a una conclusión general, y el deductivo usa principios generales para llegar a una conclusión específica.

Definiendo cada uno de ellos podemos decir que el método inductivo es una forma de razonar partiendo de una serie de observaciones particulares que permiten la producción de leyes y conclusiones generales. Por lo que el método deductivo es una forma de razonar y explicar la realidad partiendo de leyes o teorías generales hacia casos particulares.

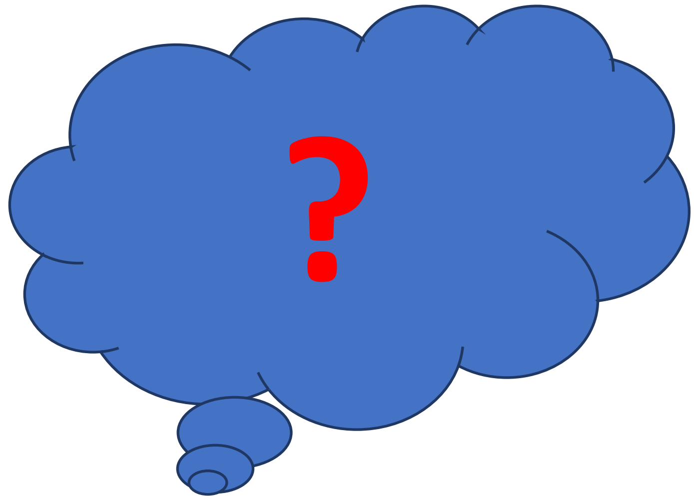
COMPETENCIAS DE LA UNIDAD II

- Resuelve problemas de la vida cotidiana a través del razonamiento inductivo y deductivo, para mejorar la toma de decisiones óptimas.
- Calcula los procesos de razonamientos inductivo y deductivo a través de la fábula, para representarlos a través de personas, animales u otros seres, habitualmente personificados.
- Desarrolla habilidades lógicas para procesar e identificarla inferencia y argumentación de los problemas de razonamientos inductivo y deductivo.
- Muestra interés para concluir, conceptualizar, demostrar y resolver problemas de razonamientos inductivo y deductivo.
- Aplica las propiedades de los números para construir argumentos lógicos simples.
- Justifica las conjeturas que han hecho basadas en observaciones, para el desarrollo de las avilidades mentales.
- Desarrolla capacidades de pensar tanto conceptualmente como analíticamente, para la resolución de aplicaciones de la vida cotidiana.

ESQUEMA DE CONTENIDO DE LA UNIDAD II

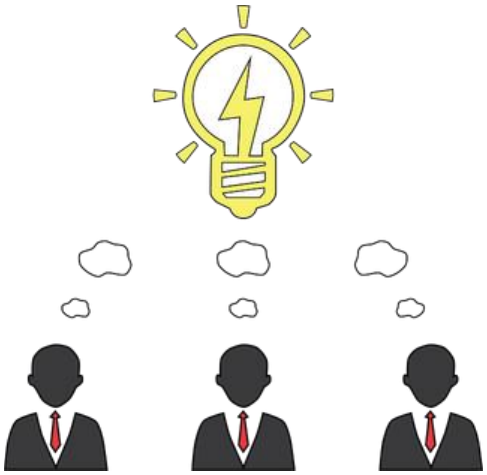
2. Diferencia entre Método Deductivo e Inductivo:

La diferencia entre el método inductivo y deductivo radica en la dirección del razonamiento para llegar a las conclusiones. A continuación, vas a observar algunas comparaciones, donde verán un poco más de detalles, su diferencia, dirección y área en la que se puede usar con cada uno de estos razonamientos.



	Método Deductivo	Método Inductivo
Explicación	Se trata de una forma de pensamiento lógico. Es más común utilizar este tipo de razonamiento cotidianamente. Este va de las premisas generales a las particulares. Así pues, se sabe que existe la gravedad y por lo tanto se puede esperar que las cosas caigan.	De la misma manera, este tipo de razonamiento pertenece al pensamiento lógico. El método inductivo es el que se utiliza en el método científico. Mediante el método inductivo se recolecta evidencia, se analiza y se llega a la creación de una hipó tesis y leyes.
Dirección	De general a particular.	De particular a general.
Áreas de Uso	El método deductivo se utiliza en la aplicación de leyes y teorías a casos particulares y específicos.	En cuanto a este método, es común que se le utilice en áreas como la investigación y la ciencia.

2.1 Introducción de Problemas Propuestos



A continuación, se muestran problemas que se resuelven a través del razonamiento deductivo e inductivo, lo cuales tienen como objetivo principal obtener un aprendizaje significativo en el nivel secundario, por medio de estos problemas Los participantes van a desarrollar el pensamiento lógico, crítico y creativo en el área de las matemáticas.

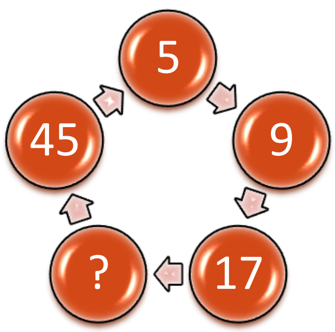
2.2 Problemas propuestos:

2.2.1 Círculo Mágico

En la siguiente imagen vemos un círculo con varios números.

¿Qué número falta en el signo de interrogación?

Solución:



Para encontrar la repuesta se debe seguir un proceso lógico. Se puede observar que tenemos una secuencia de números lo cual uno depende del resultado del otro. A través del razonamiento deductivo pueden identificar que el problema comienza una rutina lógica con el número 5 y terminando con el 45. Este comienza a sumarse con el número cuatro dando como resultado nueve, el cual comienza a aumentar la misma unidad y sumándose con el anterior, dando como resultados los siguientes números: 5; 9; 17; 29 y 45.

En forma desarrollada se tiene:

$$5 + {\color{red}4} = 99 + {\color{red}8}$$
$$= 1717 + {\color{red}12}$$
$$= 2929 + {\color{red}16}$$
$$= 45$$

Por lo consiguiente el número que falta a la secuencia lógica es 29.

2.2.2 Los Adultos

- **Guiándote de los siguientes argumentos selecciona el argumento faltante que corresponda con la secuencia del problema.**

❖ **Argumento 1:** Los adultos sólo piensan en una cosa.

❖ **Argumento 2:** Pedro es adulto.

Selecciona la repuesta correcta.

Pedro es adulto por lo tanto no piensa.

Los adultos no piensan.

Pedro piensa en sólo una cosa.

Pedro es adulto por lo tanto piensa.

Solución:

Para encontrar la repuesta se debe seguir un proceso lógico. Uno de los argumentos es general mientras que el otro es más específico. El primero se denomina argumento universal, mientras que el segundo es conocido como declaración específica. Llevándote de los argumentos y teniendo en cuenta que los argumentos sean verdaderos, podemos deducir que Pedro es adulto, por lo tanto, piensa en solo una cosa.

Por lo que podemos afirmar que la solución correcta al problema planteado es la c.

2.2.3 Las Sucesiones

¿Determine el número que sigue en la serie? 4, 21, 106, 531….

A) 3138

B) 4734

C) 5656

D) 5566

Solución:

Para encontrar la repuesta debes seguir un proceso lógico. Busca la relación que existe entre los números. Cada uno de ello es multiplicado por cinco y luego se le suma la unidad, lo cual no da como resultado el número siguiente en la secuencia.

Se tiene:

$$(4 * 5) + 1 = 21$$

$$(21 * 5) + 1 = 106$$

$$(106 * 5) + 1 = 531$$

$$(531 * 5) + 1 = 5656$$

Basado en la relación, el número siguiente en la serie es 5656.

2.2.4 El libro de Maicol

Maicol estaba leyendo un libro muy interesante de razonamiento deductivo e inductivo, en lo que en transcurso de la lectura él iba arrancando los ejercicios más interesantes para él, lo cual estaban en las páginas 4, 5, 22, 23, 45, 46 y 100.

¿Cuántas hojas arrancó Maicol del libro?

Selecciona la repuesta correcta.

A) 4
B) 7
C) 5
D) 14

Solución:

Para encontrar la repuesta debe de seguir un proceso lógico. Un buen lector deduce inmediatamente el orden en el que puede comenzar un libro, tienes dos opciones, la primera puede ser que el libro comience por un número impar y la segunda que puede comenzar por un número par. Deduciendo que el libro comienza con un número impar y Maicol arranco las páginas 4, 5, 22, 23, 45, 46 y 100, arranco las siguientes hojas: $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{21}{22}$, $\frac{23}{24}$, $\frac{45}{46}$ y $\frac{99}{100}$, lo cual hacen un total de 6 hojas. Revisando las opciones obtenidas puede observar que no está en la selección el número 6, lo que por medio de esta propuesta se puedes deducir que el libro comienza con un número par, por lo que me dará la siguiente combinación: $\frac{4}{5}$, $\frac{22}{23}$, $\frac{44}{45}$, $\frac{46}{47}$ y $\frac{100}{101}$.

La solución correcta de este problema es la c.

2.2.5 Los zapatos

Aurora, Benita, Clara y Daniela. Una lleva mocasines, otra lleva zapatillas de balé, una tercera lleva sandalias y la última trae zapatillas de tenis. La que lleva zapatillas de balé dice: Quiero mucho a Aurora, pero nada a Daniela. La que lleva las sandalias dice: No quiero a Aurora, pero soy muy amiga de Clara. Daniela dice: Quiero a Aurora y no llevo nunca mocasines.

¿Qué tipo de zapatos lleva cada una?

Solución:

De acuerdo con los eventos, puedes buscar la solución con una tabla de doble entrada, con el nombre de ellas y cada tipo de zapato que usan.

$\frac{Nombres}{Zapatos}$	**Mocasines**	**Zapatillas de balé**	**Sandalias**	**Zapatillas de tenis**
Aurora				
Benita				
Clara				
Daniela				

Marcando con una X las posibilidades negativas, y con una Y las positivas.

De acuerdo con lo dicho por cada una de las niñas se puedes deducir lo siguiente:

$\frac{\boldsymbol{Nombres}}{\boldsymbol{Zapatos}}$	**Mocasines**	**Zapatillas de balé**	**Sandalias**	**Zapatillas de tenis**
Aurora		X	X	
Benita				
Clara			X	
Daniela	X	X		

Deduciendo lo dicho por cada niña, te darás cuenta de que la relación de Aurora con cada una de las niñas es fundamentar para la resolución del problema, lo que puedes deducir cuando Daniela dice que quiere a Aurora descubrimos que no es ella la que usa sandalias. A partir de esta información afirma que ninguna lleva los zapatos de tenis, esto dice que Aurora es la que lleva los mocasines, Benita sandalias y Clara los zapatos de balé.

$\frac{Nombres}{Zapatos}$	Mocasines	Zapatillas de balé	Sandalias	Zapatillas de tenis
Aurora	Y	X	X	X
Benita	X	X	Y	X
Clara	X	Y	X	X
Daniela	X	X	X	Y

Respuestas:

- Aurora lleva los mocasines
- Benita lleva las sandalias
- Clara lleva las zapatillas de balé
- Daniela lleva las zapatillas de tenis

2.2.6 El Acertijo de Albert Einstein

En el siguiente acertijo se encuentra 5 casas de 5 colores diferentes y en cada una de ellas vive una persona de una nacionalidad diferente.

Cada uno de los dueños bebe una bebida diferente, fuma una marca de cigarrillos diferente y tiene una mascota diferente.

Responde la siguiente pregunta:

¿Quién es el dueño del pececito?

Para encontrar la repuesta al acertijo debes de analizar las siguientes 15 claves.

1. El británico vive en la casa roja.
2. El sueco tiene un perro.
3. El danes toma té.
4. La casa verde está a la izquierda de la blanca.
5. El dueño de la casa verde toma café.
6. La persona que fuma Pall Mall tiene un pájaro.
7. El dueño de la casa amarilla fuma Dunhill.
8. El que vive en la casa del centro toma leche.
9. El noruego vive en la primera casa.
10. La persona que fuma Brends vive junto a la que tiene un gato.
11. La persona que tiene un caballo vive junto a la que fuma Dunhill.
12. El que fuma Bluemasters bebe cerveza.
13. El alemán fuma Prince.
14. El noruego vive junto a la casa azul.
15. El que fuma Brends tiene un vecino que toma agua.

Solución:

De acuerdo con las claves puedes buscar la solución con una tabla de doble entrada, donde se localizan las casas de un lado y del otro la nacionalidad, el color, la mascota, la bebida y los cigarrillos.

Hay varias formas de ir llenando los espacios de la tabla, la cual puedes comenzar con las claves 8 y 9 que te permite llenar la tabla de la siguiente manera:

8. El que vive en la casa del centro toma leche.
9. El noruego vive en la primera casa

$\frac{Casas}{Otros}$	**Casa 1**	**Casa 2**	**Casa 3**	**Casa 4**	**Casa 5**
Nacionalidad	Noruego				
Color					
Mascota					
Bebida			Leche		
Cigarrillo					

Analizando las demas claves, puede escoger la pista 14 , 4 y 5.

14. El noruego vive junto a la casa azul.

4. La casa verde está a la izquierda de la blanca.

5. El dueño de la casa verde toma café.

De acuerdo con la clave 14 el noruego vive junto a la casa azul, lo cual coloca la casa azul en el casillero 2, junto al noruego.

Según la clave 4 y 5 la casa verde y blanca ocupan el casillero 4 y 5, esto se puede deducir porque el dueño de la casa verde bebe café.

$\frac{\boldsymbol{Casas}}{\boldsymbol{Otros}}$	**Casa 1**	**Casa 2**	**Casa 3**	**Casa 4**	**Casa 5**
Nacionalidad	Noruego				
Color		Azul		Verde	Blanco
Mascota					
Bebida			Leche	Café	
Cigarrillo					

Analizando las claves faltantes puedes escoger la 1 y 7:

1. El británico vive en la casa roja

7. El dueño de la casa amarilla fuma Dunhill

La clave 1 dice que el británico vive en la casa roja, esta clave solo encaja en la casa 3. Por un proceso de eliminación la primera casa es amarilla. Y la pista 7 agrega que el dueño de la casa amarilla fuma Dunhills.

$\frac{Casas}{Otros}$	**Casa 1**	**Casa 2**	**Casa 3**	**Casa 4**	**Casa 5**
Nacionalidad	Noruego		Británico		
Color	Amarillo	Azul	Rojo	Verde	Blanco
Mascota					
Bebida			Leche	Café	
Cigarrillo	Dunhills				

Analizando las claves faltantes, puedes escoger la 11, 12, 3 y 15.

11. La persona que tiene un caballo vive junto a la que fuma Dunhill

12. El que fuma Bluemasters bebe cerveza

3. El danes toma té.

15. El que fuma Brends tiene un vecino que toma agua.

La clave 11 coloca los caballos junto al dueño que fuma Dunhill. El bebedor de cerveza fuma Bulle Mater, el danés bebe té, mientras los que beben leche y café están en las casas 3 y 4. Así el noruego, quien fuma Dunhill, bebe agua. El vecino del bebedor de agua fuma Blend.

Como las bebidas que quedan son té y cerveza y sabiendo que el bebedor de cerveza fuma Blue Máster, entonces la segunda casa tiene al bebedor de té siendo el danés.

$\frac{Casas}{Otros}$	Casa 1	Casa 2	Casa 3	Casa 4	Casa 5
Nacionalidad	Noruego	Danes	Británico		
Color	Amarillo	Azul	Rojo	Verde	Blanco
Mascota		Caballos			
Bebida	Agua	Té	Leche	Café	
Cigarrillo	Dunhills	Blend			

Siguiendo las claves puedes deducir que la cerveza va en la casa 5, con los cigarrillos Blue Masters. El alemán fumador de Prince debe ir en la casa 4.Esto deja al sueco, que es dueño de un perro en la casa 5, luego el dueño de los pájaros y fumador de PallMall encaja en la casa 3.

$\frac{Casas}{Otros}$	Casa 1	Casa 2	Casa 3	Casa 4	Casa 5
Nacionalidad	Noruego	Danes	Británico	Alemán	Sueco
Color	Amarillo	Azul	Rojo	Verde	Blanco
Mascota		Caballos	Pájaros		Perro
Bebida	Agua	Té	Leche	Café	Cerveza
Cigarrillo	Dunhills	Blend	PallMall	Price	Blue Masters

Según las claves el dueño del gato vive junto al fumador de Blend, por lo que tienes un solo lugar disponible para el pececito, el cual es la casa del Alemán.

$\frac{Casas}{Otros}$	Casa 1	Casa 2	Casa 3	Casa 4	Casa 5
Nacionalidad	Noruego	Danes	Británico	Alemán	Sueco
Color	Amarillo	Azul	Rojo	Verde	Blanco
Mascota		Caballos	Pájaros	Pececito	Perro
Bebida	Agua	Té	Leche	Café	Cerveza
Cigarrillo	Dunhills	Blend	PallMall	Price	Blue Masters

Llegando al final podemos dar repuesta a nuestra pregunta, afirmando que el alemán es el dueño del pececito.

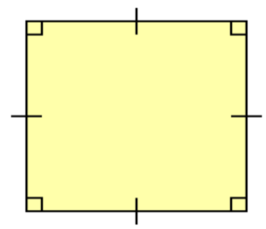
2.2.7 Los Presos

En un cuartel de la ciudad de La Vega tenían 9 presos encerrados en la misma celda, los cuales ningunos de ellos se llevan bien. El policía al darse cuenta del suceso y para evitar que pase algo entre ellos decide separarlo, teniendo en cuenta que la celda es cuadrada, decide utilizar dos cuadrados más para separarlo de tal manera que ningún preso quede en la misma celda.

¿De qué manera colocaría el policía los cuadrados?

Solución:

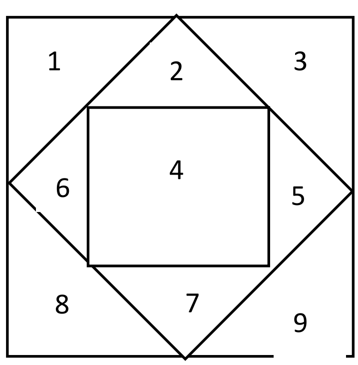
Figura a



Un cuadrado es una figura plana con cuatro lados iguales, sabiendo esto, puedes resolver el problema localizando un segundo cuadrado, de manera que su esquina quede en el centro de cada lado del primer cuadrado, como no muestra la figura a.

Ahora pasa a unir los puntos localizados en el centro, esto proporcionara otro cuadrado. Repite de nuevo el mismo paso con el tercer cuadrado, así obtendrás los 9 espacio para los presos como se muestra en la figura b.

Figura b



RESUMEN DE LA UNIDAD II

El método deductivo es aquel que, más allá de ir de lo general a lo particular, proporciona las premisas, las cuales las toma como bases o fundamentos para garantizar la veracidad de la respectiva conclusión. Parte de leyes generalizadas o de razones inherentes a los fenómenos, para establecer conclusiones puramente lógicas.

El método inductivo, es aquel que mediante las premisas pretende proporcionar fundamentos más o menos probables a la conclusión. La estructura que maneja es ir de lo particular a lo general. Es muy útil cuando se aplica en las ciencias, mediante la observación y los fenómenos particulares.

A pesar de que poseen rutas o caminos que van en distintas direcciones, tanto la deducción como la inducción, son procesos que están muy vinculados entre sí. Lo anterior se podría justificar, teniendo en cuenta que, los principios generales de los que parten los razonamientos deductivos tienen su origen en los hechos que se observan por medio de la experiencia. Los enunciados deductivos o son válidos o no lo son; mientras que, los inductivos se califican o se clasifican según el grado de probabilidad con la que sus premisas aportan fundamento para la mayor o menor veracidad de las conclusiones.

ACTIVIDADES DE LA UNIDAD II

Resuelve los Siguientes Ejercicios de Razonamiento Deductivo e Inductivo.

1. Sabiendo que todos los animales que tengo son perros menos dos, todos son gatos menos dos y que todos son loros menos dos.

¿Cuántos animales tengo en casa?

2. Una tortuga y un conejo desean cruzar el bosque en una competencia. La tortuga recorre en un día 3 Km y el conejo 5 Km. El conejo sale 3 días después que la tortuga.

¿A los cuantos días el conejo alcanzara la tortuga?

3. En un edificio de 3 pisos viven 28 personas. Si 20 personas viven encima de las otras y 22 personas viven debajo de las demás.

¿Cuántas personas viven en cada uno de los pisos?

3. En la casa de Pedro hay un canario, un lorito, un gato grande y un perro policía.

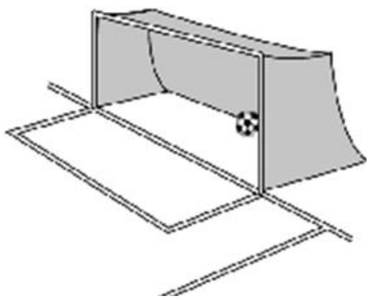



Pista:

- **Se llaman:** Clavel, Riki, Robert y Luz, pero no necesariamente en ese orden.
- Luz es más pequeño que el loro y que Robert.
- El perro es más joven que el Riki.
- Clavel es el más viejo y no se lleva bien con el loro.

¿Puede usted decir cómo se llama cada animal?

Se ha realizado una encuesta a todos los integrantes de un club deportivo, resultando lo siguiente:



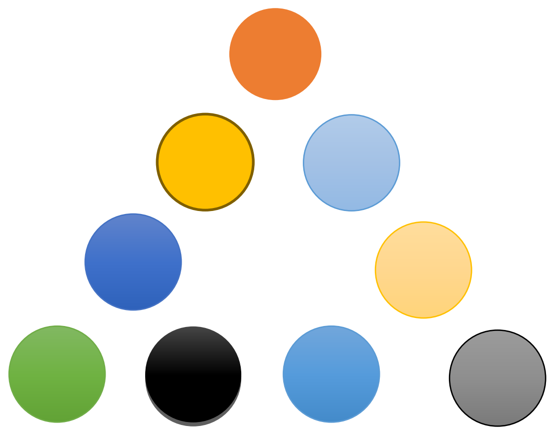
- 37 aficionados al baloncesto.
- 25 al fútbol.
- 17 al ajedrez.
- Hay 8 aficionaos al fútbol y al baloncesto simultáneamente.
- 5 al baloncesto y al ajedrez.
- Solo hay un miembro que practica los tres deportes.
- Hay 37 miembro que no practican ninguno de ellos.

¿Cuántos miembros tiene el Club?

4. En una jaula donde hay conejos y palomas, pueden contarse 35 cabezas y 94 patas.

¿Cuántos animales hay de cada clase?

5. Resuelve el siguiente circulo rellenando los espacios con los números del 1 al 9, sin repetirlo, de tal manera que su sumatoria de vente por todos los lados.



EJERCICIOS DE AUTOEVALUACIÓN DE LA UNIDAD II

Selecciona la repuesta correcta en cada uno de los problemas propuesto.

i. **2.5.1** Ocho niños se dividen 32 mangos como se indica en los datos:

DATOS:

- Ana toma 1 mango
- María toma 2
- Inés toma 3
- Rosa toma 4
- Raúl Pérez toma tantos como su hermana
- Pedro Rojas toma el doble de su hermana
- Alí Plaza toma el triple de su hermana
- Simón Roa el cuádruple de su hermana

¿Cuál es el Apellido de cada una de las muchachas?

A) Ana Plaza, María Roa, Inés Pérez y Rosa Rojas

B) Ana Roa, María Plaza, Inés Pérez y Rosa Rojas

C) Ana Plaza, María Roa, Inés Rojas y Rosa Pérez

D) Ana Pérez, María Rojas, Inés Plaza y Rosa Roa

ii. **2.5.2** ¿Cuál de los siguientes razonamientos es una conclusión válida a partir del enunciado, **“Algunos niños juegan pelota”**?

A) Si tú juegas pelota es, porque eres un niño.

B) Alex Rodríguez juega pelota, por tanto, es niño.

C) Todos los niños juegan pelota.

D) Juan es un niño, puede ser que juegue pelota.

iii. **2.5.3**A partir de las premisas

Premisas 1: Todo ser humano merece vivir dignamente.

Premisas 2: Juan de los palotes es un ser humano.

Se reduce que:

A) Solamente los seres humanos educados merecen vivir dignamente.

B) Nadie que no trabaje se merece una vida digna.

C) Juan de los palotes merece vivir dignamente.

D) Juan de los palotes es un don nadie que no merece una vida digna.

iv. **2.5.4** Juan, José y Ana viven en la misma calle, para Juan llegar a la casa de Ana tiene que pasar por el frente de la de José. Sabiendo eso, identifique cuál de las expresiones es falsa:

A) Ana pasa por el frente de la casa de José para llegar a la de Juan.

B) Ana y Juan viven en lados opuestos con relación a la casa de José.

C) La casa de José está entre la de Ana y Juan.

D) Ana vive más cerca de Juan que de José.

v. **2.5.5** Luis está jugando con un libro de matemáticas, sin querer le arranca las páginas número (14, 15, 21, 22, 203, 204 y 301).

¿Cuántas hojas arranco Luis?

A) 14
B) 7
C) 5
D) 6

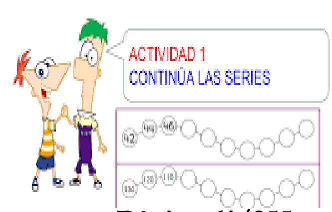
vi. **2.5.6** ¿Determine el número que sigue en la serie? 6, 20, 62, 188….

A) 222

B) 626

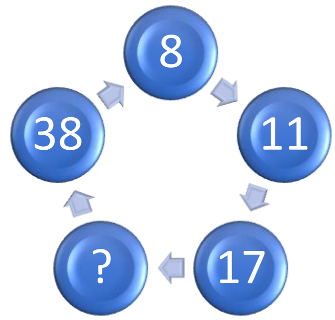
C) 566

D) 665



vii. 2.5.7 En la siguiente imagen veras un círculo con varios números. ¿Qué número falta en el signo de interrogación?

A) 26
B) 32
C) 21
D) 23



viii. 2.5.8 Irene, Ana, Katty, Olga y Elena viven en la misma casa: dos de las muchachas viven en el primer piso y tres de ellas en el segundo piso. Olga vive en piso diferente del de Katty y Elena. Ana vive en piso diferente del de Irene y Katty.

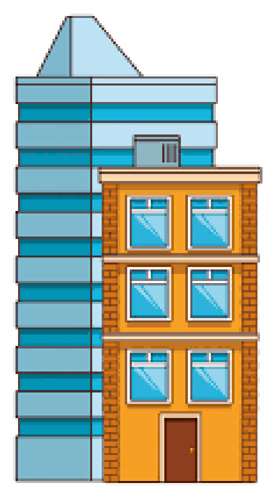
¿Quiénes viven en el mismo piso?

A) Primer Piso: Olga y Ana
Segundo Piso: Katty, Elena e Irene

B) Primer Piso: Olga, Ana e Irene
Segundo Piso: Katty y Elena

C) Primer Piso: Ana y Irene
Segundo Piso: Olga, Katty e Elena

D) Primer Piso: Katty, Elena e Irene
Segundo Piso:Olga y Ana



ix. En una jaula donde hay gallinas y cotorras, pueden contarse 39 cabezas y 118 patas.

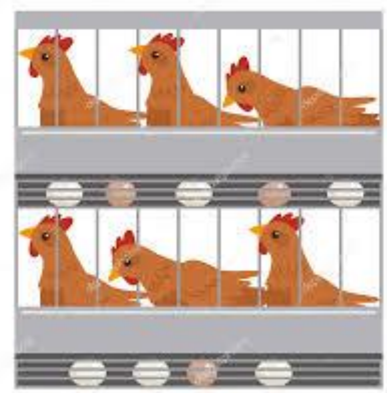
¿Cuántos animales hay de cada clase?

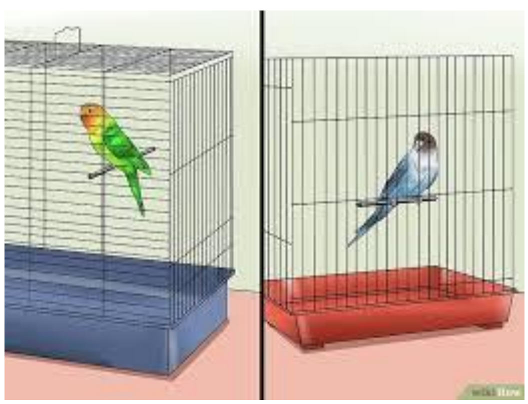
A) 25 gallinas y 14 cotorras

B) 16 gallinas y 23 cotorras

C) 30 gallinas y 9 cotorras

D) 20 gallinas y 19 cotorras





BIBLIOGRAFÍA DE LA UNIDAD II

1. Diferencia entre Método Deductivo e Inductivo. Recuperado el 21/09/ 2019 de https://difiere.com/metodo-inductivo-y-deductivo/.

2. Gómez, N. (2016). Matemática en la educacion primaria. Ediciones UAPA. Santiago de los Caballeros, República Dominicana.

3. Matemática Educación Básica. (2009) Grado 7mo. Editores: Equipo Didáctico -Técnico de Susaeta Ediciones. República Dominicana.

4. Matemática Educación Media. (2011) Grado 2do. Ediciones SM. República Dominicana.

5. Olivos J. (2016). Razonamiento Inductivo – Deductivo. Teoría y práctica.

6. Problemas Propuestos. Recuperado el 13/10/2019 de http://profe-alexz.blogspot.com/2011/03/razonamiento-deductivo-8-ejercicios.html

7. Povis A. (2015). Razonamiento Matemático. Perú.

8. Razonamiento Inductivo y Deductivo. Recuperado el 20/09/2019 de https://www.monografias.com/trabajos-pdf5/razonamientos-deductivos-e-inductivos/razonamientos-deductivos-e-inductivos.shtml.

UNIDAD III

CONJUNTO Y SUS ELEMENTOS

Autores

Esmeralda Rosario Paulino

Doraliz Báez De Rodríguez

ORIENTACIONES PARA EL ESTUDIO DE LA UNIDAD III

Los conjuntos son utilizados para poder agrupar elementos de una misma especie, estos son muy importantes para el ser humano, ya que son utilizados en nuestra vida diaria. Los conjuntos son una colección de objetos, a los que llamamos elementos, que tienen alguna característica en común.

Esta unidad didáctica contiene la teoría de conjuntos, representación, cardinal de conjunto, tipos de conjuntos y las diferentes operaciones que se pueden realizar entre conjuntos.

Este contenido tiene como propósito que los estudiantes logren comprender la importancia que tienen los conjuntos en la vida cotidiana, para que de esta manera puedan resolver problemas que tengan que ver con conjuntos.

COMPETENCIAS DE LA UNIDAD III

- Identifica conjuntos especiales utilizando sus definiciones o características, para resolver problemas relacionados con la vida cotidiana.
- Aplica el proceso realizado para determinar las operaciones conjuntistas.
- Utiliza los pasos fundamentales para realizar operaciones entre conjuntos.
- Emplea representaciones concretas, gráficas y simbólicas para organizar, registrar y comunicar ideas que involucren conjuntos.
- Representa conjuntos por extensión, comprensión y diagrama de Venn, para representar situaciones de la vida cotidiana y campo laboral.
- Reconoce la importancia de los conjuntos en el diario vivir.
- Desarrolla el pensamiento lógico creativo y crítico para resolver problemas que estén relacionados con conjuntos en la vida cotidiana.

ESQUEMA DE CONTENIDO DE LA UNIDAD III

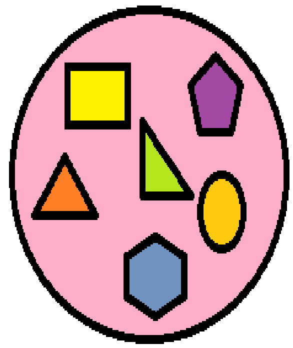
3.1 Concepto de conjunto

Un conjunto se concibe como una colección de objetos, a los que llamamos elementos, que tienen alguna característica en común.

Ejemplos de Conjuntos:

a) El conjunto de los animales mamíferos.
b) El conjunto de los números naturales.
c) El conjunto de los conectores lógicos.
d) El conjunto de las letras del alfabeto.
e) El conjunto de las figuras geométricas.

Figura 1 Representación gráfica de conjunto.



Los conjuntos se representan por letras mayúsculas, mientras que los elementos o propiedades que componen el conjunto se simbolizan por letras minúsculas, colocados dentro de llaves.

3.2. Formas de expresar un conjunto

Los conjuntos se pueden expresar de dos formas según su naturaleza y de acuerdo a la situación que se va a trabajar que son: extensión y comprensión.

3.2.1 Conjunto por extensión

En este tipo de conjunto se escriben los elementos uno a uno separados por coma o punto y coma.

Ejemplos de conjuntos por extensión:

$A = \{gato, perro, vaca, caballo\}$ $B = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ $C = \{a, b, c\}$

3.2.2 Conjuntos por comprensión

Son aquellos que expresan una idea, propiedad o característica general de los elementos del conjunto.

Ejemplos de conjuntos por comprensión:

$$A = \{x/x \text{ es una vocal}\}$$
$$B = \{x/x \text{ es un animal mamífero}\}$$
$$C = \{x/x \text{ es un número natural}\}$$

3.3 Representación gráfica de Conjunto.

Los conjuntos son representados en el diagrama de Venn, en contornos cerrados o en figuras geométricas cerradas, dentro de cada figura se colocan los elementos del conjunto de forma escrita o gráfica.

Ejemplos: Representa los siguientes conjuntos de manera gráfica.

a) A={gato, perro, vaca, caballo}

b) $B = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

c) $C = \{a, b, c\}$

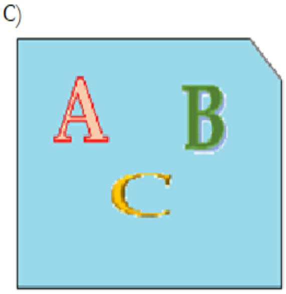
a)

En este caso utilizaremos diagrama de venn.

b)

En este caso utilizaremos una figura geométrica cerrada

C)



En este caso utilizaremos una figura geométrica cerrada

Solución: Se puede utilizar cualquier forma gráfica de las mencionadas anteriormente.

3.4 Cardinal de un conjunto

Es el número de elementos de un conjunto dado. El símbolo que representa el cardinal de un conjunto dado es $n(A)$

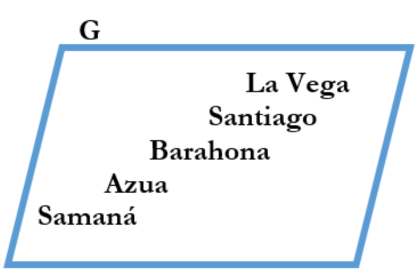
Ejemplos:

a) Dado el conjunto A= {gato, perro, vaca, caballo}. Determine su cardinal.

Se puede observar que este conjunto tiene 4 elementos, por lo que se tiene $n(A) = 4$

a) ¿Cuántos elementos tiene el siguiente conjunto?

Este conjunto tiene 5 elementos, por lo tanto $n(A) = 5$

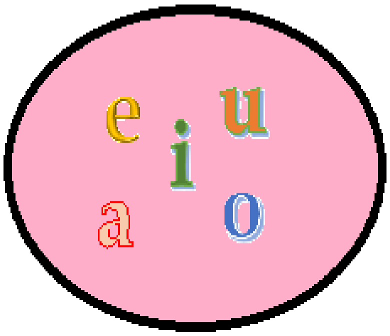


3.5 Tipos de conjuntos

3.5.1 Conjunto finito

Los conjuntos finitos son aquellos cuyos elementos se pueden contar.

Ejemplo de Conjunto finito:



$$C = \{El\ conjunto\ de\ las\ vocales\}$$

Como las vocales solo tienen 5 letras automáticamente se convierte en algo que se puede contar, por lo que este es un conjunto finito.

3.5.2 Conjunto Infinito

Los conjuntos infinitos son aquellos cuyos elementos o miembros no se pueden enumerar o contar.

Ejemplo de Conjunto infinito

$$N = \{El\ conjunto\ de\ los\ números\ naturales\ \}$$

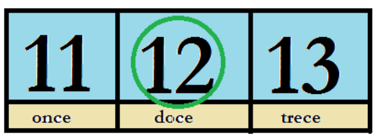
Se sabe que los números naturales no tienen fin, por lo que pertenecen a un conjunto infinito.

3.5.3 Conjunto unitario

Es el conjunto que tiene un único elemento.

Ejemplo de conjunto unitario:

$B = \{x/x \text{ es un número entero par comprendido entre } 11 \text{ y } 13\}$.



Se puede observar que entre 11 y 13 existe un único número par, el cual es el número 12., convirtiendo este conjunto en un conjunto unitario.

3.5.4 Conjunto Vacío

El conjunto vacío es el que no posee elemento alguno. Se simboliza $\emptyset = \{\ \}$

<u>Ejemplos</u>

1. A= {x/x es un perro que habla} Aquí se puede observar que no existe perro que habla, por lo que este es un conjunto vacío.
2. C= {x/x es un ser humano con 100 narices}. Aquí se puede observar que no existe un ser humano con 100 narices, por lo que este es un conjunto vacío.

3.5.5 Conjuntos Disjuntos

Son aquellos conjuntos que no tienen ningún elemento en común.

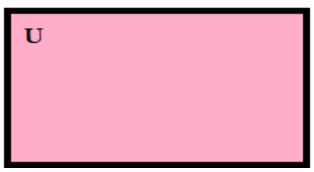
Ejemplos

a) Si $A = \{3,5,7,9\}$ y $B = \{2,4,6,8\}$, entonces A y B son disjuntos, puesto que entre ambos no existe nada en común.

b) Si $A = \{a, b, c, d\}$ y $B = \{e, f, g\}$, entonces A y B son disjuntos, ya que entre ambos no existe nada en común.

3.5.6 Conjunto universal

Es un conjunto formado por todos los elementos dados, se denota por U y se representa gráficamente con un rectángulo.

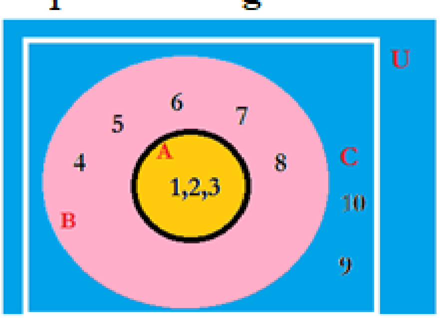


Por ejemplo:

Si en un estudio intervienen los conjuntos $A = \{1,2,3\}$. $B = \{4,5,6,7,8\}$y $\mathbf{C} = \{\mathbf{9}, \mathbf{10}\}$ entonces el conjunto universal **U** del contexto es:

$$\mathbf{U} = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}, \mathbf{5}, \mathbf{6}, \mathbf{7}, \mathbf{8}, \mathbf{9}, \mathbf{10}\}$$

Representado gráficamente es:



3.5.7 Familia de conjunto

Es un conjunto cuyos elementos son a su vez conjuntos. El nombre familia o colección se utiliza para enfatizar la naturaleza conjuntista de sus elementos y suele venir acompañado de una notación distinta.

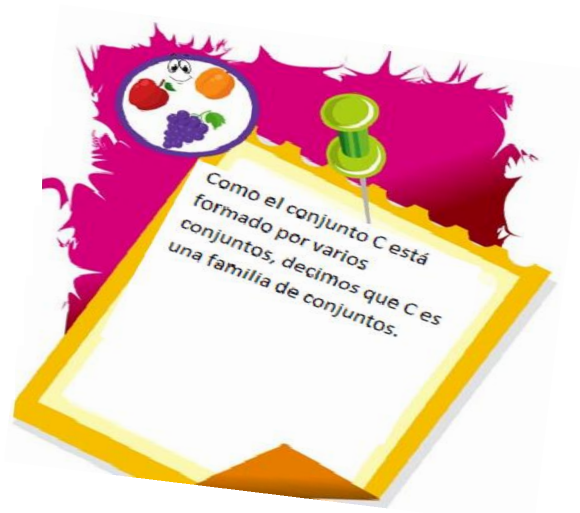
Ejemplo de familia de conjunto:

$$C = \{\{2;3\};\{a\};\{6;b\};\emptyset\}$$

Se observa que: C es familia de conjuntos

$C=\{\{2;3\};\{a\};\{6;b\};\{\emptyset\}\}$

{Todo lo que está dentro de llaves es conjunto.}



3.5.8 Conjunto potencia

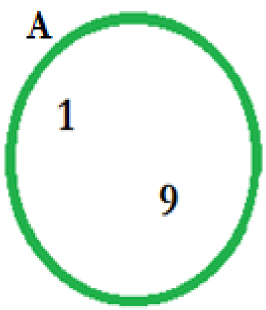
Son todos los subconjuntos posibles de un conjunto.

Para realizar la potencia de un conjunto calculamos los subconjuntos posibles elevando al cuadrado la potencia según los números de elementos.

2^n {Donde n es el número de elementos}

Ejemplos: Determina el conjunto potencia en cada caso

a) A continuación, el conjunto A:



Pasos Para realizar la potencia de un conjunto:

Paso 1: Identificar cuántos elementos tiene el conjunto.

En este caso hay dos elementos (1 y 9), por lo que $n = 2$

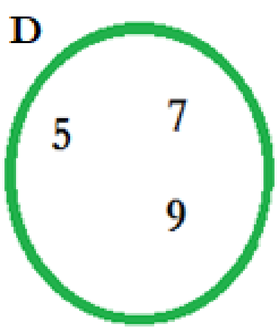
Paso 2: Se sustituyen los datos en la fórmula $\mathbf{2}^n$, como $n = 2$, se sustituye la n por el 2:

$$\mathbf{2}^2$$

Paso 3: Se procede a realizar la operación

$2 * 2 = 4$, por tanto, el conjunto potencia estará compuesto por 4 elementos.

b) A continuación, este otro conjunto el D.



En este caso hay tres elementos (5, 7 y 9), por lo que $n = 3$

Se sustituyen los datos en la fórmula $\mathbf{2}^n$, como $n = 3$, se sustituye la n por el 3

$$\mathbf{2}^3$$

Se procede a realizar la operación

$2 * 2 * 2 = 8$, por tanto, el conjunto potencia estará compuesto por 8 elementos

3.6 Operaciones con Conjuntos

3.6.1 Unión de conjuntos

La unión de conjuntos es la unificación de los elementos de dos o más conjuntos, sabiendo que los elementos repetidos solo se colocan una vez, Se representa por el símbolo (∪).

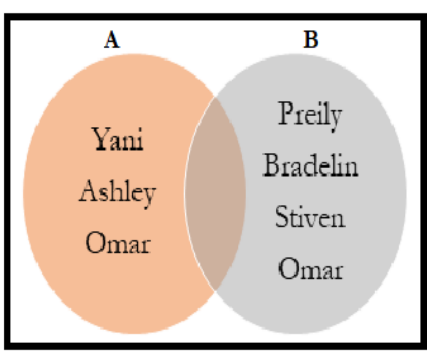
Ejemplos.

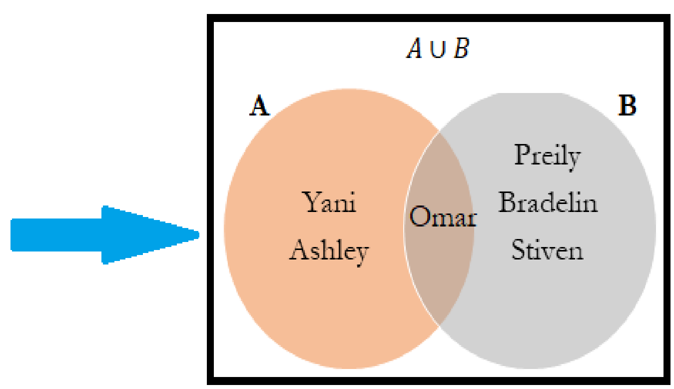
a) Dado los conjuntos

$A = \{Yani, Ashley, Omar\}$ $B = \{Omar, Preily, Bradelin, Stiven\}$. Determina $A \cup B$.

Se procede a resolver uniendo los elementos de ambos conjuntos en un nuevo conjunto obteniendo: $A \cup B = \{Yani, Ashley, Omar, Preily, Bradelin, Stiven\}$

Representado de forma gráfica se obtiene:



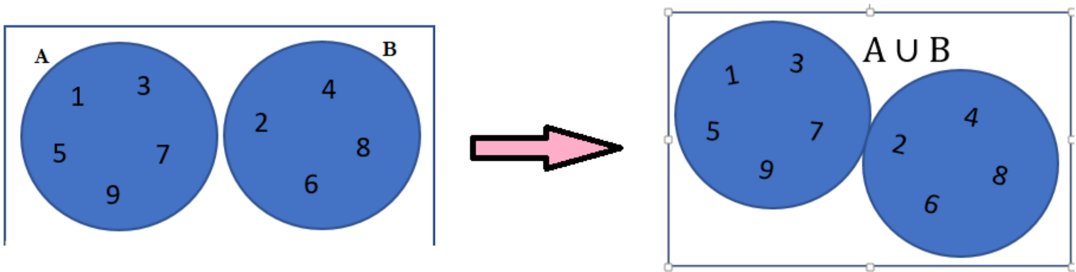


Recordando…Los elementos en común se deben colocar en el centro para su representación gráfica. En este caso el elemento que se repite es ¨Omar¨.

b) Dados los conjuntos $A = \{1,3,5,7,9\}$ y $B = \{2,4,6,8\}$. Determine $A \cup B$.

Se procede a resolver uniendo los elementos de ambos conjuntos en un nuevo conjunto obteniendo: $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

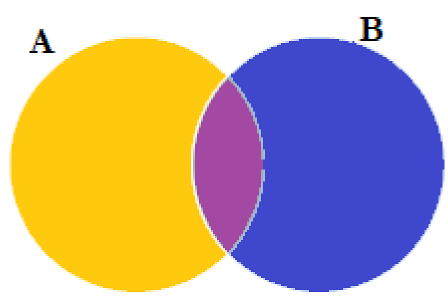
Representado de forma gráfica se obtiene:



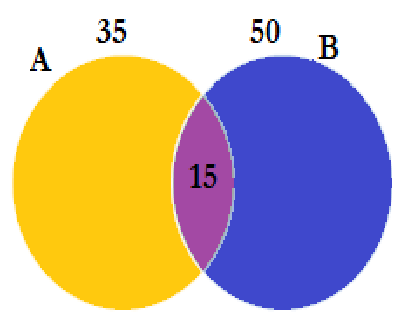
Recordando…que al no tener ningún elemento en común estos quedan separados porque son disjuntos.

c) En una comunidad residen 115 personas, de las cuales 35 estudian, 50 trabajan y 15 estudian y trabajan. ¿Cuántas personas no estudian ni trabajan?

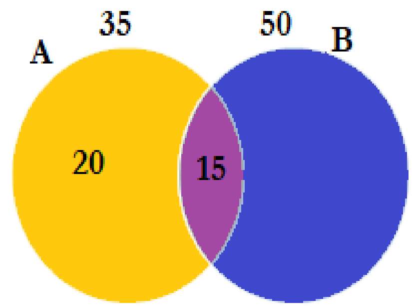
Para la solución del problema se puede utilizar un diagrama de Venn. Lo primero que se debe de hacer es definir cuál será el primer elemento y cuál será el segundo. Identificando las personas que estudian como el conjunto A representado por el color naranja, los que trabajan como conjunto B representado por el color azul y la parte del centro corresponde a los elementos que tienen en común ambos conjuntos.



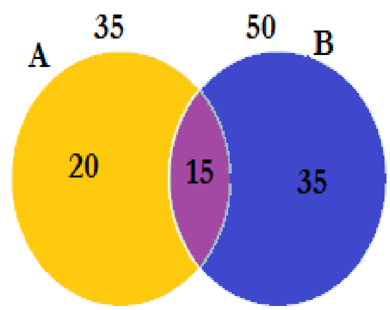
Luego, colocamos los datos en el diagrama, 35 que estudian en el conjunto A, los 50 que trabajan en el conjunto B, y los que estudian y trabajan al ser común lo colocamos en el centro.



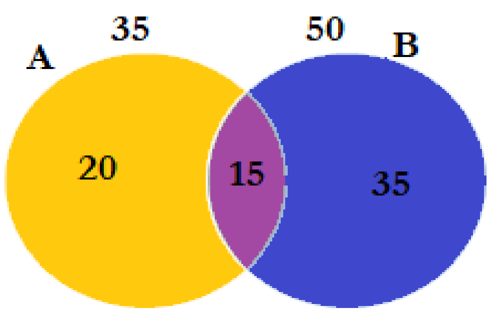
Para poder definir el valor de la región del conjunto A debemos restar la cantidad de personas que estudian menos la cantidad que hay en común, en este caso será $35 - 15 = 20$



Para poder definir el valor de la región del conjunto B realizamos el mismo procedimiento, debemos restar la cantidad de personas que trabajan menos la cantidad que hay en común, $50 - 15 = 35$



La unión de los conjuntos equivale a la suma de los elementos de las tres regiones.



$$A \cup B = 20 + 15 + 35$$

$A \cup B = 70$ personas

Finalmente, ¿Cuántas personas no estudian ni trabajan?, para saberlo se debe restar el total de personas, que en este caso es 115 menos la unión de conjuntos, que en este caso es 70. $115 - 70 = 45$

Respuesta

45 personas no estudian ni trabajan.

3.6.2 Intersección de Conjuntos

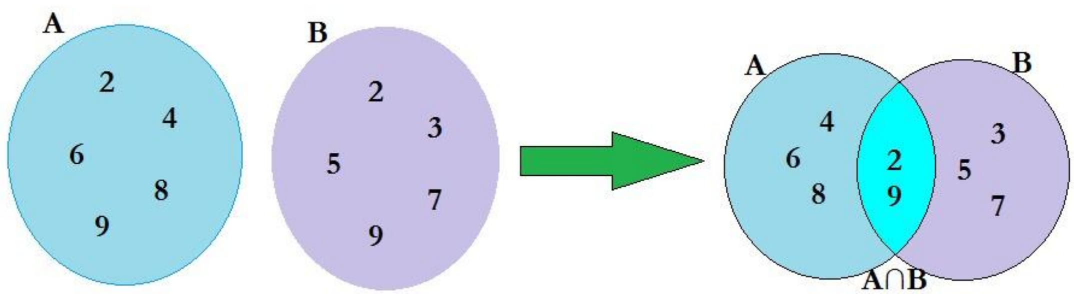
Es el conjunto que está formado por los elementos comunes. Se representa por el símbolo (∩).

Ejemplos.

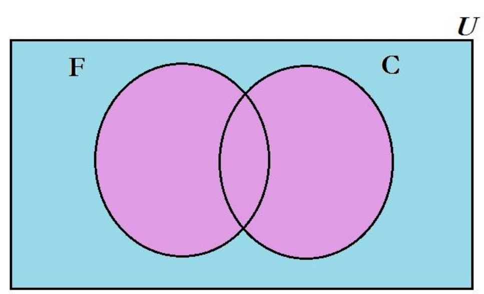
a) Dado los conjuntos $A = \{2,4,6,8,9\} B = \{2,3,5,7,9\}$. Determina $A \cap B$.

Entonces $A \cap B = \{2,9\}$, ya que 2 y 9 son los elementos en común entre ambos conjuntos.

Representado de forma gráfica se obtiene:

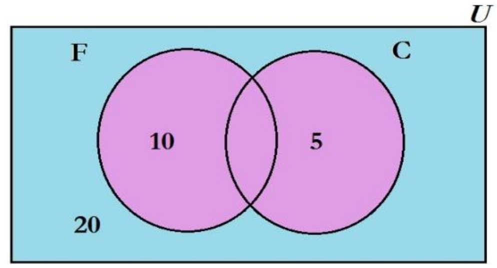


b) En un salón de clases de 50 alumnos, a 10 les gusta solo el helado de fresa y a5 solo el helado de chocolate. Si a20 niños no les gusta el helado ni de fresa ni de chocolate: ¿a cuántos niños les gustan los dos helados?

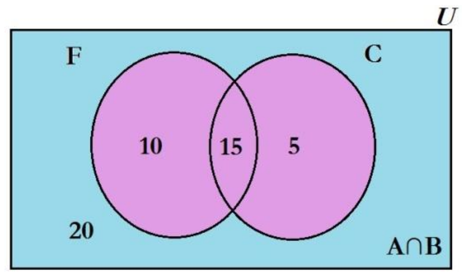


Para la solución del problema lo primero que hay que hacer es definir cuál será el primer elemento y cuál será el segundo. Se identifican las personas que les gusta solo el helado de fresa como el conjunto A, los que le gusta el helado de chocolate lo identificamos como conjunto B y la parte del centro corresponde a los elementos que tienen en común ambos conjuntos. Estos dos conjuntos deben estar contenidos en un conjunto universal, que es precisamente el salón de clase completo.

Luego, colocamos los datos en el diagrama; 10 que les gusta solo el helado de fresa en el conjunto A, los 5 que les gusta el helado de chocolate en el conjunto B, y los 20 que no les gusta ninguno de los dos sabores se coloca en la a región exterior a los conjuntos. Hay 10 estudiantes que solo les gusta el helado de fresa, 5 solo el de chocolate y 20 ninguno de los dos sabores $10 + 5 + 20 = 35$.



Para poder obtener el valor de la región del centro debemos restar el total de alumnos menos los 35 que ya tenemos colocado en los conjuntos $50 - 35 = 15$



Finalmente, ¿A cuántas personas les gustan los 2 sabores? A 15 personas

3.6.3 Diferencia de Conjuntos

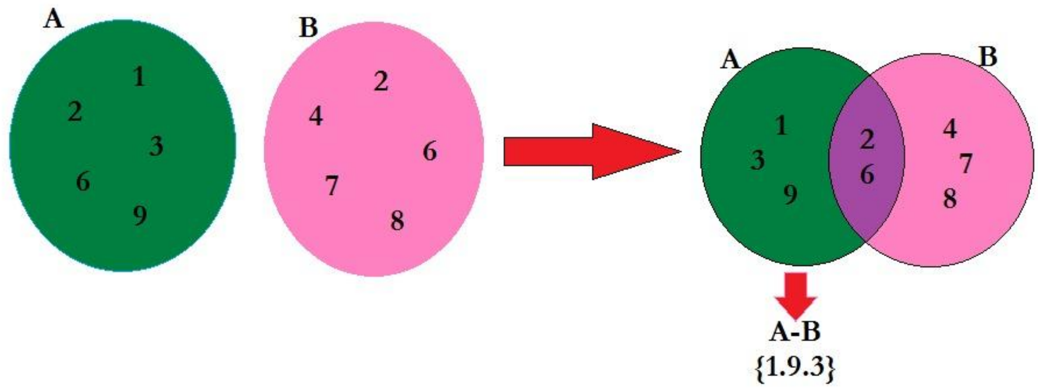
Es el conjunto formado por los elementos que están en el primer conjunto que no están en el segundo. Se representa por el símbolo $(-)$

Ejemplos:

a) Dado los conjuntos $\mathrm{A} = \{1,2,3,6,9\}$ y$\mathrm{B} = \{2,4,6,7,8\}$. Determina $\mathrm{A} - \mathrm{B}$.

Entonces $\mathrm{A} - \mathrm{B} = \{1.3.9\}$, puesto que estos elementos están solo en el primer conjunto (A).

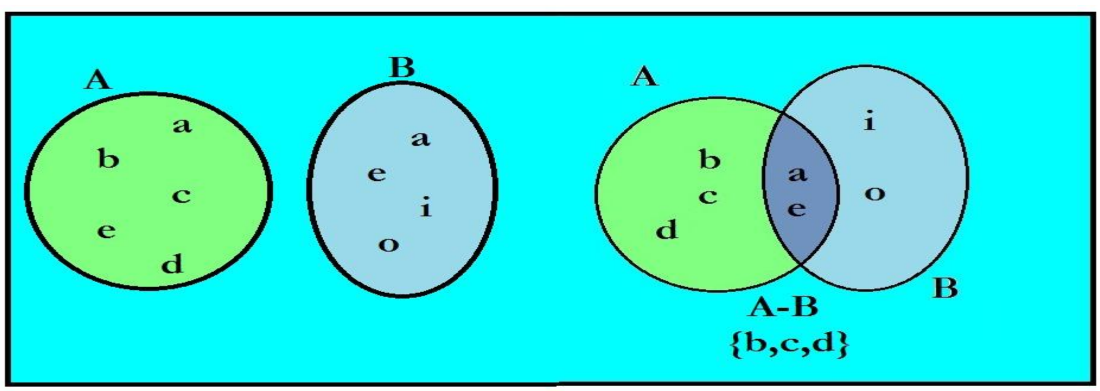
Representado de forma gráfica se obtiene:



b) Dado los conjuntos $\mathrm{A} = \{\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}, \mathrm{d}, \mathrm{e}\ \}$ y $\mathrm{B} = \{\mathrm{a}, \mathrm{e}, \mathrm{i}, \mathrm{o}\}$. Determina $\mathrm{A} - \mathrm{B}$.

Entonces $\mathrm{A} - \mathrm{B} = \{b, c, d\}$, debido a que estos elementos están solo en el primer conjunto (A)

Representado de forma gráfica se obtiene:



3.6.4 Diferencia Simétrica

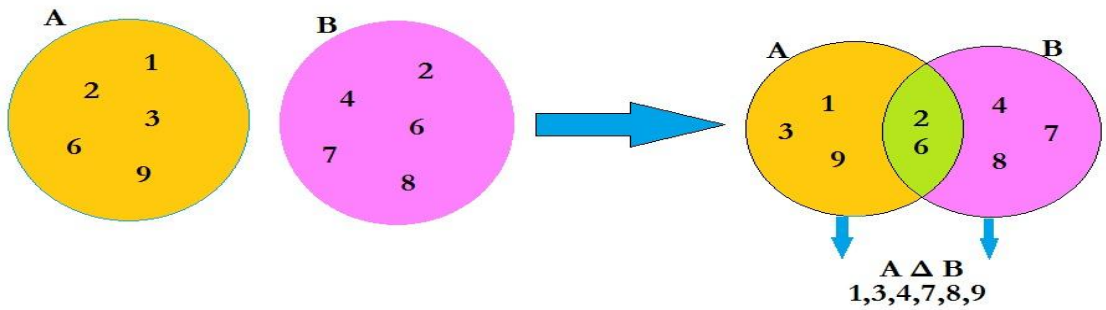
Es el conjunto formado por los elementos no comunes entre ambos conjuntos. Se representa por el símbolo (Δ)

Ejemplos:

a) Dado los conjuntos $\mathrm{A} = \{1,2,3,6,9\ \}$ y $\mathrm{B} = \{2,4,6,7,8\}$. Determina $\mathrm{A}\ \Delta\ \mathrm{B}$.

Entonces $A \Delta B = \{1,3,4,7,8.9\}$, puesto que son los elementos no comunes entre ambos conjuntos.

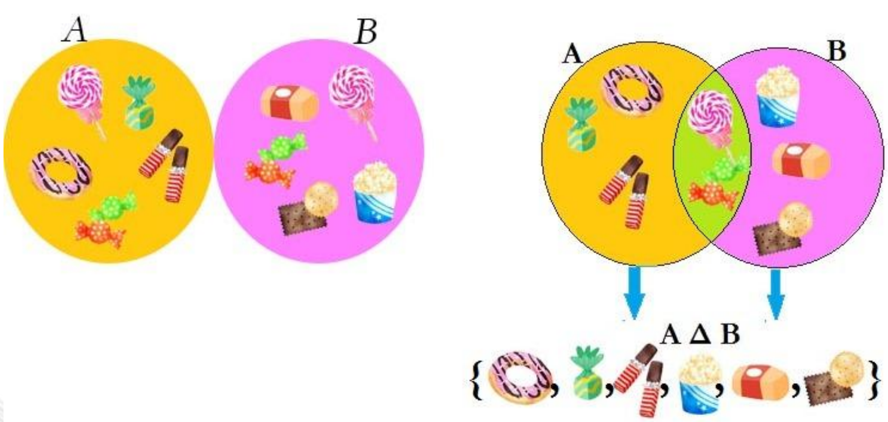
Representado de forma gráfica se obtiene:



b) Dado los conjuntos A={Paleta, dona, caramelos, chocolates, mentas} y B={paleta, galletas, palomitas, mentas, turrón}. Determina $A \Delta B$.

Entonces $A \Delta B =$ {dona, caramelos, chocolates, palomita, turrón, galletas}, puesto que son los elementos no comunes entre ambos conjuntos.

Representado de forma gráfica se obtiene:



3.6.5 Complemento de Conjunto

Es otro conjunto que contiene todos los elementos que no están en el conjunto original. Para poder definirlo es necesario especificar qué tipo de elementos se están utilizando, o de otro modo, cuál es el conjunto universal. Se simboliza A^c

Ejemplos:

c) Si $U = \{-2,-1,0,1,2,3,4,5\}$, $A = \{2,4\}$, $B = \{-2,-1,0,1\}$ y $C = \{-2,2,4\}$. Determina:

a) A^c

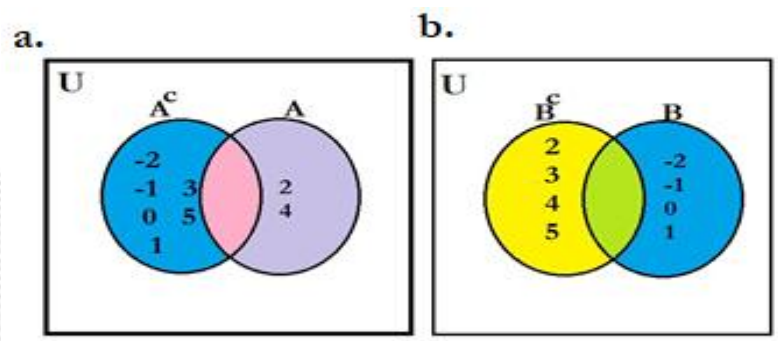
b) B^c

Resultado

a. $A^c = \{-2,-1,0,1,3,5\}$, porque al conjunto A le faltan los números $\{-2,-1,0,1,3,5\}$, para que sea el universal.

b. $B^c = \{2,3,4,5\}$, debido a que al conjunto B le faltan los números $\{2,3,4,5\}$, para que sea el universal.

Representado de forma gráfica se obtiene:



RESUMEN DE LA UNIDAD III

Concepto de conjunto: Un conjunto se concibe como una colección de objetos, a los que llamamos elementos, que tienen alguna característica en común.

Conjunto por extensión: En este tipo de conjunto se escriben los elementos uno a uno separados por coma o punto y coma.

Conjunto por comprensión: Son aquellos que expresan una idea, propiedad o característica general de los elementos del conjunto.

Cardinal de un conjunto: Es el número de elementos de un conjunto dado. El símbolo que representa el cardinal de un conjunto dado es $n(A)$.

Tipos de conjuntos

a) **Conjunto finito:** Los conjuntos finitos son aquellos cuyos elementos se pueden contar.

b) **Conjunto Infinito:** Los conjuntos infinitos son aquellos cuyos elementos o miembros no se pueden enumerar o contar.

c) **Conjunto unitario:** Es el conjunto que tiene un único elemento.

d) **Conjunto Vacío:** El conjunto vacío es el que no posee elemento alguno. Se simboliza $\emptyset = \{\ \}$

e) **Conjuntos Disjuntos:** Son aquellos conjuntos que no tienen ningún elemento en común.

Operaciones con Conjuntos

a) **Unión de conjuntos:** Es la unificación de los elementos de dos o más conjuntos. Sabiendo que los elementos repetidos solo se colocan una vez, Se representa por el símbolo $(\cup)$.

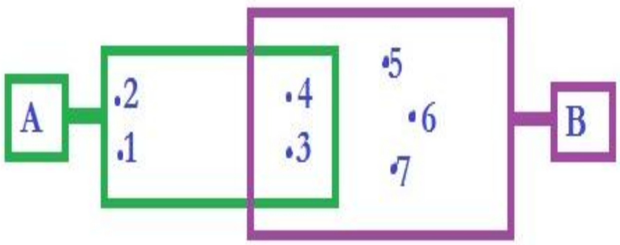
b) **Intersección de Conjuntos:** Es el conjunto que está formado por los elementos comunes. Se representa por el símbolo $(\cap)$.

c) **Diferencia de Conjuntos:** Es el conjunto formado por los elementos que están en el primer conjunto que no están en el segundo. Se representa por el símbolo $(-)$

d) **Diferencia Simétrica:** Es el conjunto formado por los elementos no comunes entre ambos conjuntos. Se representa por el símbolo (Δ)

ACTIVIDADES DE LA UNIDAD III

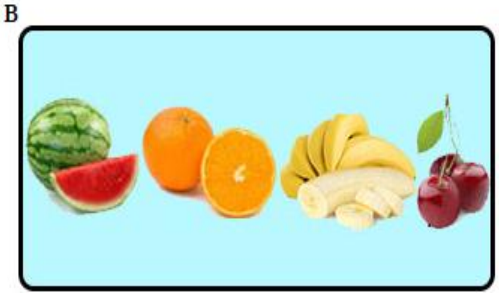
1. Observa en el siguiente diagrama a los conjuntos A y B. Luego escríbelos por extensión y por comprensión.



2. Dado los siguientes conjuntos Determine $A \cup B$

A

B



3. Dado los siguientes conjuntos $A = \{1,3,6,9\}$; $B = \{1,2,4,6,8,10\}$; $C = \{1,4,6\}$ y $D = \{1,2,3,4,5,6\}$. Determine
   a. $A \cap B$.
   b. $B \cup D$
   c. D^C
   d. $A - B$
   e. $B \Delta C$
   f. $A \cup D$

4. Dados los conjuntos $A = \{naranjas, mandarinas, manzanas\}$ y $B = \{plátanos, sandías, cerezas\}$. Determina $A \cup B$ en su forma analítica y gráfica

5. **Determina el cardinal de los siguientes conjuntos**
   a. $N = \{$x/x es un múltiplo de 3 menor o igual que 15 $\}$
   b. F={a,b,c,d,e}
   c. M={x/x son los colores de la bandera Dominicana}
   d. U={0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}

6. Marcos tiene en su habitación unas fotografías estupendas de sus animales favoritos: Una mariposa, un pingüino, un perro, un gato, un pez volador, un avestruz, un pato y un caballo. Si llama A al conjunto de las Aves, B al de los animales que vuelan y C al de los animales que nadan, haz el Diagrama de Venn con la clasificación de los animales de la colección de Marcos.

EJERCICIOS DE AUTOEVALUACIÓN DE LA UNIDAD III

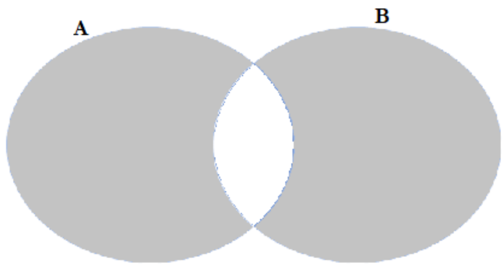
1. **El conjunto de los números mayores que 1000 es un conjunto:**
   a. Finito
   b. Infinito
   c. Unitario
   d. Vacío
   e. Universal

2. **El conjunto conformado con los números mayores que tres y menores que tres es un conjunto:**
   a. Infinito
   b. Universal
   c. Unitario
   d. Vacío
   e. Finito

3. **¿Cuántos elementos hay en el conjunto {Banana, paleta, jugo}?**
   a. 2 elementos
   b. 1 elemento
   c. 4 elementos
   d. 3 elementos

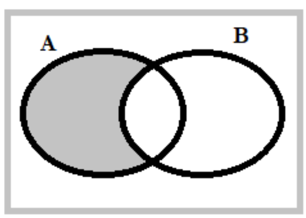
4. **¿Cuál de las siguientes opciones en un conjunto por comprensión?**
   a. B={x/x es un animal mamífero}
   b. B= x/x es un animal mamífero.
   c. B= x/x es una vocal
   d. B={gato, perro, vaca, caballo}

5. **¿Qué operación representa el siguiente conjunto según la parte sombreada?**



a. Unión de conjunto
b. Intersección de conjunto
c. Diferencia de conjunto
d. Diferencia simétrica

6. **¿Qué operación representa el siguiente conjunto según la parte sombreada?**



a. Unión de conjunto
b. Intersección de conjunto
c. Diferencia de conjunto
d. Diferencia simétrica

7. **Dado los conjuntos A= {manzana, uva, pasa}, B= {naranja, mango, banana}. ¿Cuál es el resultado correcto de la operación $A \cup B$?**
   a. = manzana, uva, pasa, naranja, mango, banana
   b. = {manzana, uva, pasa, naranja, mango, banana}
   c. ={manzana, uva, pasa, naranja, banana}
   d. {manzana, uva, pasa, naranja, mango}

8. **Si A= {rojo, amarillo, verde, azul} y B= {rosado, blanco, negro, verde} $A \cap B$ es**
    a. {rojo, amarillo, verde, azul, rosado, blanco, negro, verde}
    b. {rojo, amarillo, verde, azul}
    c. {verde}
    d. {rosado, blanco, negro, verde}

9. **De 200 lectores: 80 leen las revistas A y B, 110 son lectores de la revista B. ¿Cuántos leen sólo las revistas A?**
    a. 80 lectores
    b. 90 lectores
    c. 100 lectores
    d. 70 lectores

10. **En un aula de 34 alumnos a 21 les gusta el béisbol, a 18 les gusta el baloncesto y a 10 les gusta ambos deportes. ¿A cuántos no le gusta ninguno de los dos deportes?**
    a. 10
    b. 11
    c. 8
    d. 5

BIBLIOGRAFÍA DE LA UNIDAD III

1. Arjona, A. H. (2002). Teoría de Conjuntos. En A. H. Arjona, Teoría de Conjuntos. mara@usal.es.
2. Castillo, C. I. (s.f.). Lógica y Teoría de Conjuntos. En C. I. Castillo, Lógica y teoría de conjuntos.
3. Cheifetz Y Avenoso F. (1974). Lógica y Teoría de Conjuntos. Editora Alhambra
4. Fernández, V. (2004). Teoría básica de conjuntos, Editora Anaya Educación
5. Franco, J. R. (2005). Fundamentos de Matemáticas. En J. R. Franco, Fundamentos de Matemáticas (pág. 195). México: FCA.
6. Geraldino, R. P. (2014). Matemática 1 educación media. En R. P. Geraldino, Matemática 1 educación media. Impretur SRL.
7. Hay Tipo. (s.f.). Hay Tipo. Recuperado el 15 de noviembre de 2019, de https://haytipos.com/conjuntos/
8. Gómez, N. (2017). Matemática del nivel primario. En N. G. López, Matemática del nivel primario. Santiago: Ediciones UAPA.
9. Marks, Robert W (1967). Iníciese en la teoría de conjuntos (algebra moderna). Marcombo.
10. Ramos, E. E. (15 de julio de 2015). SlideShade. Recuperado el 2019 de noviembre de 2019, de https://es.slideshare.net/LuiggiVargas/matemtica-bsica-eduardo-espinoza-ramos-50536649
11. Teoría de conjuntos. (s.f.). Teoría de conjuntos. Recuperado el 15 de noviembre de 2019, de https://www.ecured.cu/Teor%C3%ADa_de_conjuntos

UNIDAD IV
EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Autores
Aury Mariely Gil González
Nicole Brito González

ORIENTACIONES PARA EL ESTUDIO DE LA UNIDAD IV

En esta unidad se aborda el tema de las expresiones algebraicas. El desarrollo pedagógico contiene explicaciones y ejercicios que permiten trabajar con los diferentes usos de las expresiones algebraicas.

Una expresión algebraica contiene letras, números y signos. La manipulación de expresiones algebraicas tiene las mismas propiedades que la manipulación de expresiones numéricas, ya que las letras se comportan como si fuesen números. Las expresiones algebraicas que se tratarán en este curso tendrán, por lo general, una o dos letras.

En el desarrollo del contenido, se explican ejercicios amparados en definiciones y propiedades de las matemáticas.

COMPETENCIAS DE LA UNIDAD IV

- Identifica variables o incógnita para resolver ecuaciones.
- Identifica el uso de variables en aplicaciones de la vida cotidiana.
- Diferencia los tipos de expresiones algebraicas para su correcto uso en la solución de ecuaciones.
- Escribe del lenguaje ordinario al algebraico para resolver ecuaciones.
- Resuelve problemas con expresiones algebraicas para dar respuesta a situaciones de la vida cotidiana y del campo laboral.

ESQUEMA DE CONTENIDODE LA UNIDAD IV

4.1. Uso de variables para expresar relaciones.

4.1.1. Variables.

4.2. Representaciones algebraicas.

4.2.1. Definición de polinomio.

4.3. Clasificaciones de expresiones algebraicas.

4.4. Valor numérico de expresiones algebraicas.

4.5. Operaciones de expresiones algebraicas.

4.6. Términos semejantes.

4.7. Lenguaje algebraico.

4.8. Modelo algebraico.

4.9. Ecuaciones lineales o de primer grado en una variable.

4.10. Sistemas de ecuaciones lineales.

4.1. Uso de variables para expresar relaciones.

El álgebra implica la solución de problemas usando variables, expresiones y ecuaciones. Este tema se centra en variables y expresiones, también aprenderás sobre los tipos de expresiones usadas en el álgebra.

4.1.1. Variables.

Una variable es un símbolo que admite cualquier valor, dependiendo de la expresión de la que forme parte. Estos símbolos son por lo general las últimas letras del abecedario.

Ejemplo:

Problema	
Identificar la constante y la variable en la expresión $\mathbf{11-}\ \boldsymbol{x}$.	
Respuesta 11es la constante. $\boldsymbol{x}$ es la variable.	Como 11 no puede cambiar su valor, es una constante. La variable es x, porque podría ser 0, 9, o cualquier otro número.

4.2. Representaciones de expresiones algebraicas.

Una expresión algebraica es una combinación de letras y números están conectada por operaciones matemáticas: adición, sustracción, multiplicación, división y potenciación.

Por lo general las letras representan cantidades desconocidas y son llamadas variables o incógnitas. Las expresiones algebraicas permiten traducir a las expresiones del lenguaje matemático del lenguaje habitual, por lo que se le aplican las mismas leyes y propiedades.

Las expresiones algebraicas surgen de la obligación de traducir valores desconocidos a números, como se observó anteriormente. La rama de las matemáticas responsable del estudio de estas expresiones en las que aparecen números y letras, así como signos de operaciones matemáticas, es Álgebra.

Como las expresiones algebraicas son combinaciones de letras y números que se pueden encontrar en cualquier tipo de operación, presumiblemente hay una clasificación de expresiones algebraicas preestablecidas. Es importante tener claro las funciones de los criterios de clasificación, para resolver correctamente los ejercicios de expresión algebraica.

Ejemplos
$-5x^3-10x^2$
$9x$
$3x^2+5x-1$
$\frac{x}{4}$

En estos ejemplos se puede notar que las expresiones algebraicas se pueden diferenciar según las letras que tengan, exponentes enteros o fracciones. Es decir, según tenga o no tengan letras bajo un signo radical. En este caso decimos las expresiones algebraicas también se clasifican en racional e irracional.

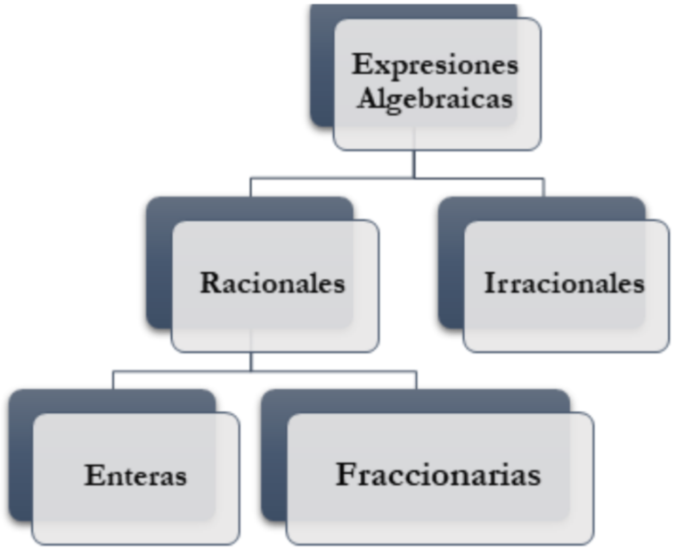


Figura .1

Las **expresiones algebraicas racionales** son aquellas donde todos los exponentes de las letras son números enteros.

Las **expresiones algebraicas enteras** son aquellas donde cuyos exponentes son números naturales.

En caso contrario, si la expresión tiene por lo menos una letra en divisor o denominador (o tienen algún exponente negativo) entonces se suele llamar expresiones algebraicas fraccionaria.

Las **expresiones algebraicas irracionales** son aquellas que tienen letras bajo el signo radical.

Ejemplo:

$\sqrt{3ab} + 4ab; xy + 2\sqrt[3]{x}$ algebraica irracional es aquella que tiene por lo menos un exponente racional no entero.

4.2.1. Definición de polinomio

Es una expresión algebraica constituida por una o más variables, utilizando solamente operaciones de adición, sustracción, multiplicación y exponentes numéricos positivos.

El polinomio de un sólo término se denomina monomio, el de dos binomios, el de tres trinomios.

La expresión general de los polinomios que sólo tienen una variable, los más utilizados, es:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Ejemplo:

$$P(x) = 3x^5 + 7x^4 + 15x^3 + 5x^2 - 9x - 10$$

4.3. Clasificaciones de expresiones algebraicas.

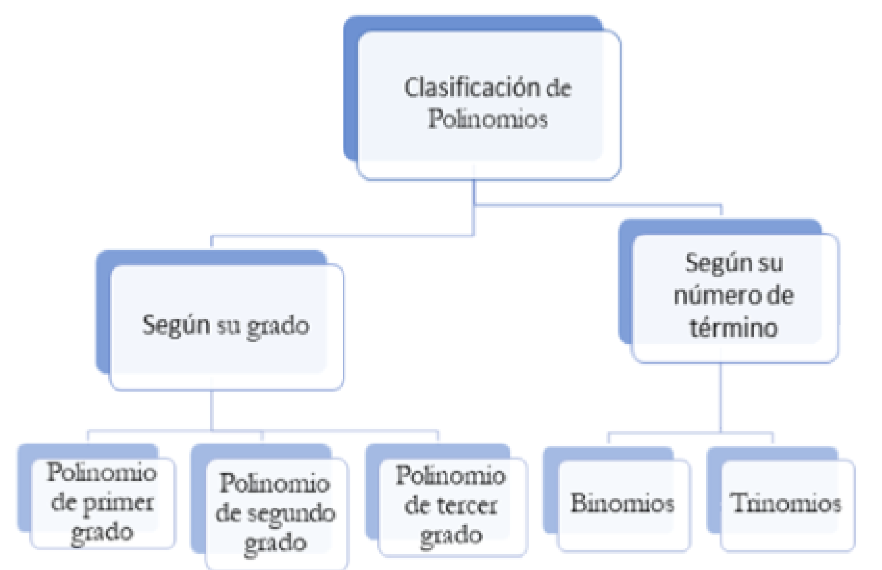


Figura 2. Gráfica de clasificación de Polinomios

Según su grado.

El grado de un polinomio viene determinado por los exponentes, que acompañan cada una de las variables.

Un exponente, también conocido como índice o bien potencia, es el número que determina la cantidad de veces que un número puede multiplicarse en sí mismo, es una expresión que permite simplificar la multiplicación en su aspecto más tangible, que es la graficación.

Polinomio de primer grado.

Se determinan polinomios de primer grado cuando el exponente mayor de una variable coincide o es igual a uno (1).

En la gráfica, un polinomio de Primer Grado se puede percibir así:

$$P(x) = 8x + 5 + 3x$$

Polinomio de segundo grado.

Estos son aquellos cuyo valor del exponente de su variable es igual a dos (2), o bien el mayor valor de la variable es igual a dos, como se expresa a continuación:

$$P(x) = 4x + 3 + 8x^2$$

Polinomio de tercer grado.

Aquellos cuyo valor mayor de la variable resulta igual o superior al número tres (3). Tal es el caso del que te presentaremos a continuación:

$$P(x) = 2x^3 + 4 + 8x + 73$$

Polinomio nulo.

Determinado como tal aquel polinomio en el cual los números que lo componen tiene un valor igual a cero (0), tal como se expresa a continuación:

$P(x) = 0x^n + 0x^{n-1} - 1 + \cdots + 0x^3 + 0x^2 + 0x + 0$

Un polinomio es una expresión algebraica formada por un monomio o por la suma de varios monomios. A cada monomio se le llama término del polinomio. Si tiene dos términos se llama binomio; si tiene tres trinomios.

Monomios (un término) y multinomios (dos términos o más). A los multinomios con dos términos se le llama binomios, y los de tres términos, trinomios.

Ejemplo:

Monomio: $9x$

Binomio: $-z^2 + x\,y^2\,z$

Trinomio: $2x^3\,y\,z^2 - 2y^2 + 1$

Polinomio entero: es aquella expresión algebraica cuyos términos son todas expresiones algebraicas racionales enteras.

Ejemplo:

$$\mathrm{P(x)} = 3\mathrm{x}^4 + 2\mathrm{x}^3 - 5\mathrm{x} + 4 \quad \mathrm{y} \quad \mathrm{Q(x,y)} = 3\mathrm{xy}^3 + 7\mathrm{xy}^4 + \sqrt{5}\,\mathrm{x}^4\mathrm{y}^8$$

Polinomios especiales

Polinomio completo con respecto a una letra: es el polinomio que presenta todas las potencias de letra, desde el mayor grado hasta el cero inclusive. El término algebraico que tiene la letra de grado cero se llama término independiente.

Ejemplo:

Este polinomio es completo respecto a x

$$P(x, y) = 3x^3y + 5x^2 - 4xy^2 - 8$$

Polinomio ordenado con respecto a una letra: es el polinomio cuyos exponentes de la letra considerada, van aumentando o disminuyendo, según sea ascendente o descendente la ordenación.

Ejemplo:

$$P(x, y) = 8x^5y + 6x^3y^4 - 7xy^6 - 9y^3$$

Este polinomio es ordenado con respecto a x

Polinomio completo y ordenado con respecto a una letra: es aquel polinomio que presenta las dos características anteriores.

Ejemplos:

$$P(x) = 8x^5 + x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x + 3$$

$Q(x, y) = 5x^2y^4 + xy^3 + y^2 - 3x^3y + 4$(polinomio complerto y ordenado con respecto a y)

Polinomio homogéneo: es el polinomio que presenta el mismo grado absoluto en todos sus términos.

Ejemplo:

$$P(x, y) = 7x^2y^3 + 6x^3y^2 - 4x^5 - 2xy^4$$

Polinomios idénticos: son aquellos polinomios que presentan en sus términos semejantes, coeficientes iguales.

Sea $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ y $Q(x) = mx^3 + nx^2 + px$

Decimos que $P(x) = Q(x) \leftrightarrow a = m, b = n, c = p$

Así:$P(x) = 3x^2y - \frac{8}{2}x + 1$ es idéntico a $Q(x) = 3x^2y - 4x + (4 - 3)$

Polinomio opuesto: es aquel polinomio que se obtiene cambiando de signo a todos sus coeficientes del polinomio dado.

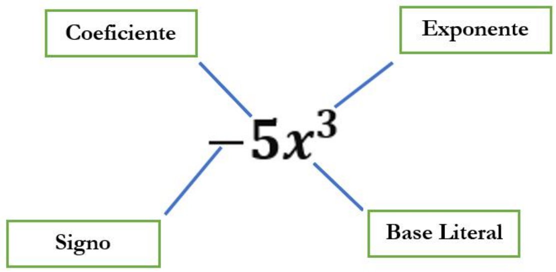
Sea $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Decimos que $-P(x)$es su opuesto $\leftrightarrow$ $-P(x) = -ax^3 - bx^2 - cx - d$

Así: sea $P(x) = 2x^3 + 3x^2y - 4x$ su opuesto es $-P(x) = -2x^3 - 3x^2y + 4x$.

Un monomio o término algebraico es el producto de un factor numérico o constante por una o más variables literales.

En cada término algebraico se distinguen el coeficiente numérico (que incluye el signo y constantes matemáticas) y la parte literal (que incluye variables con exponentes).



Orden de un polinomio

Existen dos formas de ordenar un polinomio, bien si sus términos se disponen de menor a mayor, en cuyo caso se hablará de un orden ascendente, o cuando los términos del polinomio se ordenan desde el grado mayor observado en sus términos hasta el menor de ellos, forma que recibe el nombre de Orden descendente. Igualmente, tanto en el orden ascendente como descendente, se debe tomar en cuenta el grado al que se encuentra elevado el término independiente, el cual es igual a cero, por lo que éste.es decir, el término independiente- siempre es el término de menor grado, lo cual hace que, en el caso del orden descendente, de existir en el polinomio, ocupe el último lugar.

Los polinomios se ordenan escribiendo los exponentes en orden

- Descendente, es decir, de mayor a menor.
- Ascendente, es decir, de menor a mayor.

Polinomio	Orden
$3x^2 - 5x + 8$	Orden descendente
$8 - 5x + 3x^2$	Orden ascendente

4.4. Valor numérico de una expresión algebraica.

El valor numérico de una expresión algebraica es el valor real que se obtiene de dicha expresión al sustituir los valores reales se les asignen a las partes literales que componen la expresión algebraica considerada. Al proceso de calcular el valor numérico de una expresión se le denomina evaluación.

Ejemplos:

Evalúe las expresiones siguientes, para $\boldsymbol{a = 3, b = -2, x = 5, y = 4, c = 1}$

a) $x + 3y$

$= 5 + 3(4)$

$5 + 12 = 17$

b) $2ax + 3bc$

$= 2(3)(5) + 3(-2)$

$30 - 6 = 24$

c) $(2bc - x)/(4ax + y)$

$$= \frac{2(-2)(1) - 5}{4(3)(5) + 4}$$

$$\frac{-4 - 5}{60 + 4} = \frac{-9}{64}$$

4.5. Operaciones de expresiones algebraicas.

Adición de polinomios.

Dados dos o más polinomios, se procede a agrupar los términos semejantes correspondientes y procede a efectuar la suma algebraica de estos términos semejantes.

Ejemplo:

Eleny va al salón de belleza se lava el pelo con una línea de $450pesos, se pinta las uñas y se depila las cejas por $ 200 pesos, al final del día gasta $1025. ¿Cuánto gastó en pintarse las uñas?

Datos:

450 lavado

200 depilación

$x$variable (pintada de uñas).

Solución:

$x + 450 + 200 = 1025$

$x + \cancel{450 + 200 - 450 - 200} = 1025 - 450 - 200$

$x = 375$

El precio de pintarse las uñas es de $375.

Sustracción de polinomios

Restar un polinomio de otro es sumar al minuendo el opuesto de sustraendo, o sea que el primer polinomio es el minuendo y el polinomio a restar o segundo, es el sustraendo. Para efectuar la sustracción, luego procede a cambiarle los signos a los términos del sustraendo y suma éste al minuendo; entonces, procede al igual que en la adición, y se agrupan los términos semejantes y efectúa la suma.

Ejemplo:

Si Jaireny desea realizar una fiesta con 17 invitados y en el supermercado solo hay paquete de 5 vasos, cada paquete de vasos trae 5 vasos y si compran 4 ya tienen 20 vasos. ¿Cuántos vasos sobran?

Datos:

17 invitados

20 vasos

$x$variable (vasos sobrantes).

Solución:

$x = 20 - 17$

$x = 3.$

El número de vasos que sobran es 3.

Multiplicación de polinomios

Dados dos polinomios factores, multiplicando y multiplicador, hallar el producto. Procede a multiplicar cada término del multiplicador por cada uno de los términos del multiplicando.

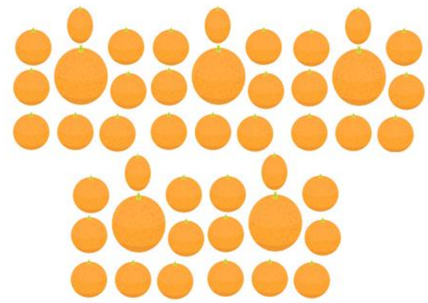
Se debe tomar en cuenta en el producto si las cantidades son negativas o positivas.

$(-a)\,(-b) = +ab$
$(-a)\,(+b) = -ab$
$(+a)\,(-b) = -ab$
$(+a)\,(+b) = +ab$

Al multiplicar los términos debe sumar los exponentes correspondientes a cada letra.

Ejemplo:

Si María tiene 40 toronjas y Leidy tiene el triple de la cantidad que tiene María ¿Cuántas toronjas tiene Leidy?



Datos

María$= 40\ toronjas$

Leidy $= el\ triple\ de\ la\ cantidad\ de\ María$

Solución

$$\mathbf{3x = 120}$$

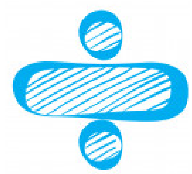
Ahora se procede a sustituir la variable por el valor numérico.

Para saber la cantidad de toronjas que tiene Leidy se debe multiplicar 3 veces la cantidad de toronjas que tiene

$3(40) = 120$

Leidy tiene 120 toronjas

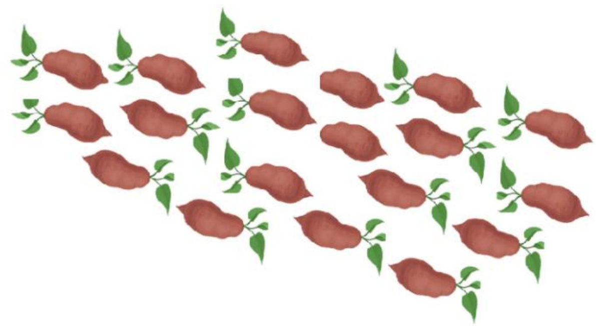
División de los polinomios



a) Se ordenan los términos de los polinomios de forma descendente.
b) Se obtiene el primer término del cociente al dividir el coeficiente del primer término del dividendo entre el coeficiente del primer término del divisor y restar al exponente del divisor el exponente del dividendo en cada variable existente en el divisor y dividendo en dicho término.
c) El cociente obtenido se multiplica por el divisor y este producto se le resta al dividendo. el resto obtenido se toma de nuevo como dividendo.
d) El procedimiento anterior se repite hasta obtener un resto cero o de grado menor que divisor.
e) Se verifica el mismo procedimiento de la multiplicación para los signos entre cantidades negativas y positivas.

Ejemplo:

Moisés y Joselito tienen un mercadito en su comunidad, por motivo a semana santa compraron 58 libras de batatas, deben repartirse en partes iguales. ¿Cuántas libras de batatas tocan cada uno?



Datos

Moisés $= \ x$

Joselito $= \ x$

Total de batatas $= \ 58 \, libras$

Solución

$$x + x = 58$$

$2x = 58$

$\frac{2x}{2} = \frac{58}{2}$

$x = 29$

Para repartir las libras de batatas en partes iguales, se debe dividir entre dos el total de las libras de batatas.

Moisés y Joselito tocan 29 libras de batatas cada uno.

4.6. Términos semejantes

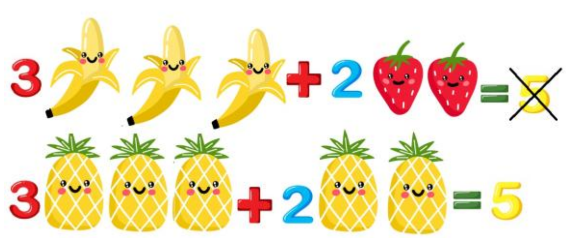
Dos términos son semejantessí poseen idéntica parte literal, y estos a su vez tienen los mismos exponentes entre sí.

Ejemplos:

$3x^2 \longrightarrow$ Semejante a $6x^2$, ambos tienen igual parte literal y exponente.

$-8x^2$y $\longrightarrow$ Es semejante a $8x^2 \ y$

$-8x^2 \longrightarrow$ No es semejante a $-8x^3$ No tiene igual exponente.



4.7. Lenguaje algebraico

El lenguaje algebraico es muy útil porque nos permite expresar en lenguaje matemático expresiones de la vida cotidiana.

En los enunciados de los problemas de álgebra nos encontramos con expresiones en el lenguaje común. En las que una o más cantidades con desconocidas y se necesitan traducir al lenguaje algebraico, para poder resolver el problema. Es decir, el lenguaje algebraico es una expresión algebraica que representa al lenguaje común.

Ejemplos:

Lenguaje común	**Lenguaje algebraico**
Un número cualquiera	x
La suma de dos números	$x + y$
La diferencia de dos números	$x - y$
El doble de un número	$2x$
La mitad de un numero	$x/2$
El cubo de un número	x^3
El triple de un número	$3x$
El cuadrado de un número	x^2
Un número dividido entre 2	$x/2$

Un número aumentando en 2 o un número más 2	$x+2$
Un número disminuido en 4	$x-4$
Un número par	$2x$
Dos números consecutivos	$x, (x+1)$
El cinco por ciento de un número	$0.05x$
El área de un rectángulo de base x y altura x+3	$x(x+3)$

Es importante destacar que estas son solo algunas de las expresiones algebraicas, y que algunas otras se pueden construir realizando combinaciones entre ellas, como, por

Ejemplo:

La suma de un número más su mitad: $x + x/2$

La suma de dos números consecutivos: $x + (x+1)$

El doble de la suma de dos números: $2(x+y)$

4.8. Modelos algebraicos

Modelar matemáticamente es una etapa bastante desafiante. Es aquí que se da la "traducción" de la situación-problema al leguaje matemático, intuición y creatividad son elementos indispensables en cada parte de este proceso. En este proceso es necesario clasificar las informaciones (relevantes y ni relevantes), identificando los hechos involucrados. Decidir cuáles son los aspectos a ser perseguidos, hacer explícitos los datos que están dados implícitamente, generalizar y seleccionar variables relevantes, seleccionar símbolos apropiados para dichas variables y describir las relaciones que se establezcan, en términos matemáticos.

Se concluye generalmente la etapa de modelación con un conjunto de expresiones aritméticas y fórmulas, o ecuaciones algebraicas, graficas, o representaciones que lleven a la solución.

Es así que los modelos algebraicos son una herramienta que ayudan a solucionar problemas cotidianos, cuando no contamos con datos o eventos dados de forma directa o explicita. Para construir este tipo de modelos, no solo debe conocer como traducir el lenguaje cotidiano al lenguaje algebraico, tal como lo hemos tratado anteriormente en el apartado 4.7. En esta misma unidad, para lo cual representamos las incógnitas con literal y formamos una expresión algebraica, también se debe activar una habilidad que consiste en reconocer y relacionar los eventos hasta que hacemos uso de la igualdad " $=$ " para asi establecer la ecuación a resolver.

En todo momento el modelo proporciona la fórmula del problema. Es una representación simplificada del mundo verdadero, incluye variables pertinentes que se pueden controlar.

La mayoría de los modelos son simbólicos porque los símbolos representan las propiedades del campo de estudio que se desee.

Para iniciar la construcción de un modelo algebraico, se procede a precisar el valor (o valores) que se desee encontrar, sin recurrir al ensayo y error; a este valor le llamaremos incógnita.

4.9. Ecuaciones lineales o de primer grado en una variable.

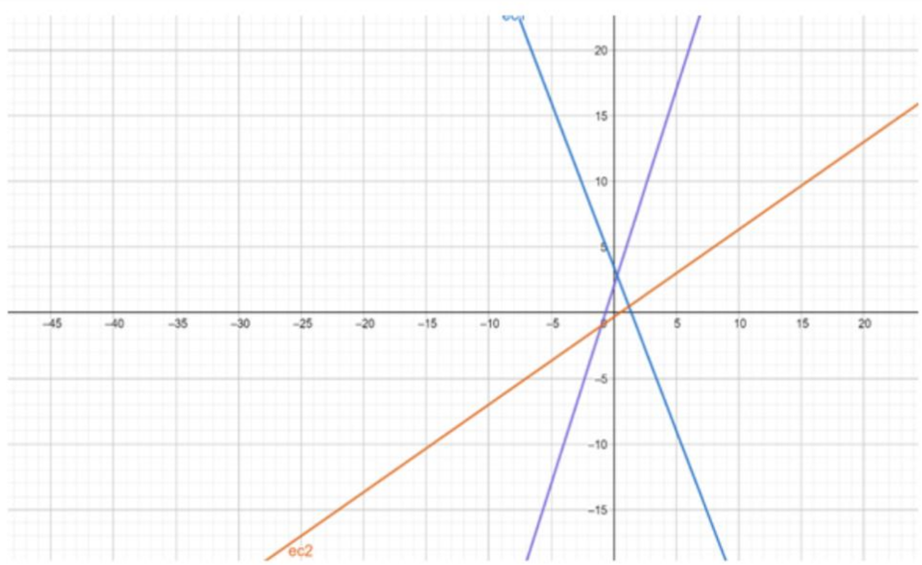


Figura 3. Gráfico de ecuaciones lineales.

Una ecuación de primer grado o lineal o ecuación lineal es una igualdad que involucra una o más variables a la primera potencia y no contiene productos entre las variables, es decir, una ecuación que involucra solamente sumas y restas de una variable a la primera potencia.

Ecuación de primer grado y una variable $ax + b = 0, a \neq 0$

En todo anillo conmutativo pueden definirse ecuaciones de primer grado.

En una incógnita

Una ecuación de una variable $mx + n = 0$ definida sobre un cuerpo k, es decir. Con$\{m, n, x\} \subset k, m \neq 0$ donde x es la variable, admite la siguiente solución:

$$x = -\frac{n}{m}$$

Cuando tanto la incógnita como los coeficientes son elementos de un anillo que no es un cuerpo, el asunto es más complicado ya que sólo m divide a n,si el anillo es un dominio de integridad:

$$\exists k: n = m \cdot k \rightarrow x = -k$$

En dos incógnitas.

En el sistema cartesiano representan rectas. Una forma común de las ecuaciones lineales de dos variables es:

$$\mathrm{y = mx + n;}$$

Dondem, representa la pendiente y el valor de n determina el punto donde la recta corta al eje y (la ordenada al origen).

Ejemplos:

$$3x + 2y = 5$$

$$3x + y - 5 = -7x + 4y + 3$$

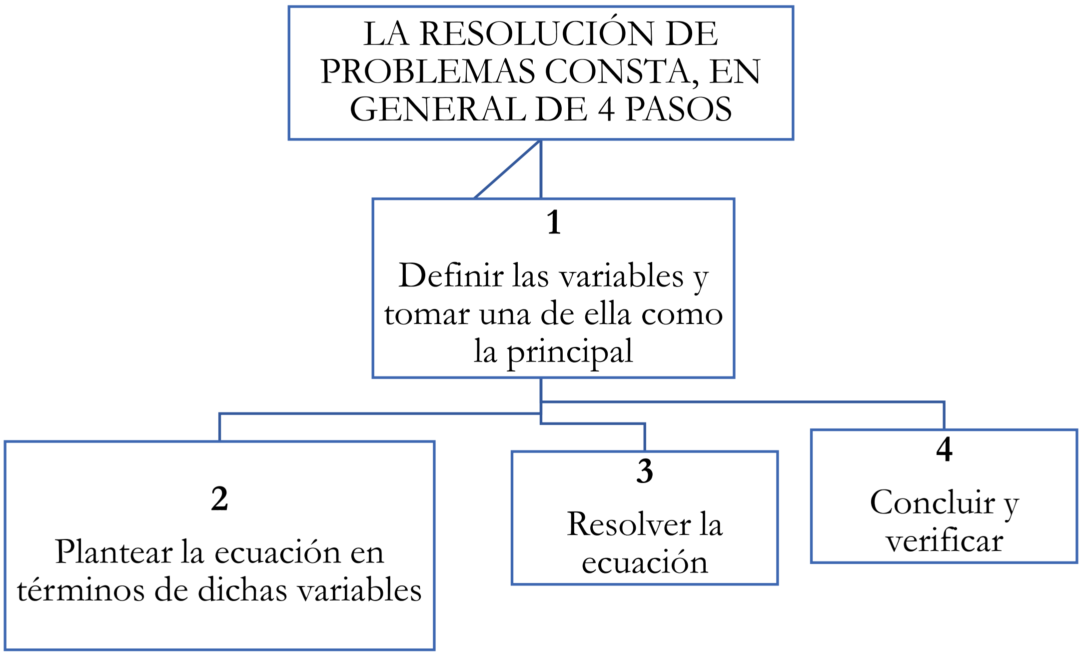
$$x - y + z = 15$$

$$3x - 2y + z = 20$$

$$x + 4y - 3z = 10$$

Problemas:

Es de vital importancia dominar y tomar en cuenta esta serie de pasos al momento de resolver un problema de ecuaciones.



a) **La edad de Cristian es el triple de la de Pedro y dentro de 10 años será el doble. Determina las edades actuales de Cristian y Pedro.**

- **Paso 1. Definir las variables y tomar una de ella como la principal**

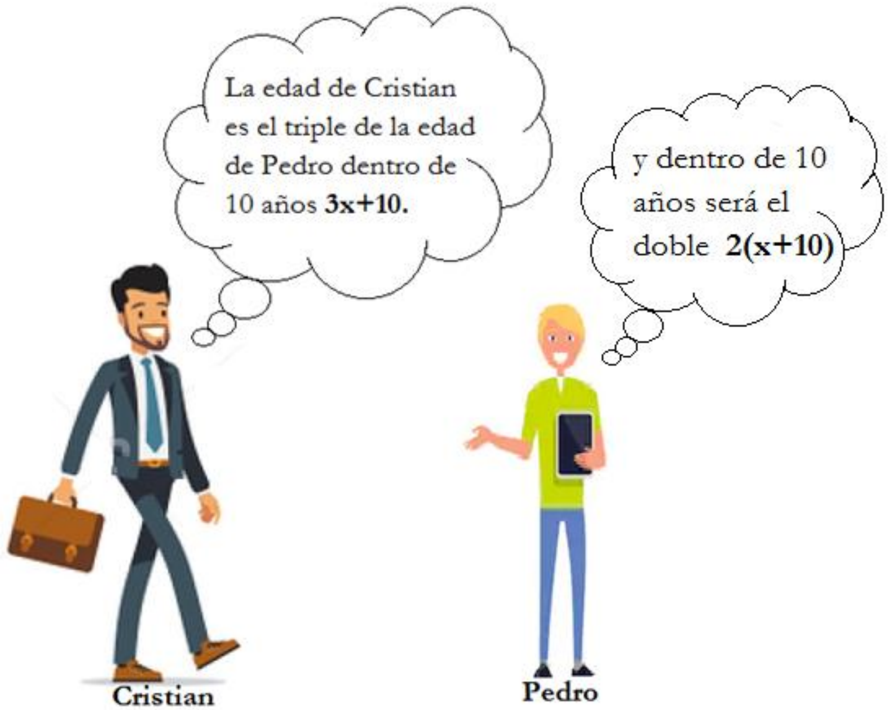
x= Edad actual de Pedro

3x= Edad actual de Cristian

Actual		Futuro
x	10 años	x+10 edad de Pedro
3x	después	3x+10 edad de Cristian

- **Paso 2. Plantear la ecuación en términos de dichas variables.**

La edad de Cristian es el triple de la de Pedro y dentro de 10 años será el doble.



- **Paso 3. Resolver la ecuación $\mathbf{3x + 10 = 2(x + 10)}$**

$$\underbrace{3x + 10}_{\textbf{1}^{\textbf{er}}\textbf{ Miembro}} = \underbrace{2\,(x + 10)}_{\textbf{2}^{\textbf{do}}\textbf{ Miembro}}$$

Primero se debe aplicar la propiedad distributiva en la multiplicación del 2^{do} miembro para eliminar el paréntesis, $2(x + 10)$.

¿Cómo se aplica la propiedad distributiva en la multiplicación?

Esta propiedad afirma que la multiplicación de un número por una suma es igual a la suma de las multiplicaciones de dicho número por cada uno de los sumandos.

Ejemplo

$$2(x + 10)$$

$$(2)(x) = 2x$$

$$(2)(10) = 20$$

$$2x + 20$$

Al aplicar la propiedad distributiva en el 2domiembro se obtiene $2x + 20$ ahora se procede con el paso 3 (resolver la ecuación).

$$3x + 10 = 2x + 20$$

Para resolver esta ecuación se debe trasladar al 1er miembro los términos que están acompañados de variables o términos semejantes y al 2do miembro se traslada los que no tienen variables, teniendo en cuenta que al trasladar de un lugar a otro pasa con el signo inverso.

$3x - 2x = 20 - 10$

$x = 10$

Paso 4. Conclusión y verificación

Sabiendo que la edad de Pedro (x) = 10

x= Edad actual de Pedro

3x= Edad actual de Cristian

Verificación

Pedro tiene 10 años

3(10) = Cristian tiene 30 años

b) **Andrés y Jorge tienen una deuda de \$3,560 que debe ser pagada en marzo de 2020, si el doble de lo que debe Andrés menos lo que debe Jorge suma a \$2,260. ¿Cuál es la deuda de cada uno?**

- **Paso 1. Definir las variables y tomar una de ella como la principal**

- **Paso 2. Plantear la ecuación en términos de dichas variables**

Si el doble de lo que debe Andrés menos lo que debe Jorge suma a \$2,260.

$$2x - y = 2{,}260$$

Andrés y Jorge deben pagar una deuda en marzo de 2020 que suma \$3,560.

$$x + y = 3{,}560$$

- **Paso 3. Resolver la ecuación**

Se procede a resolver esta ecuación por reducción de términos semejantes

$$\begin{cases} 2x - y = 2{,}260 \\ x + y = 3{,}560 \end{cases}$$

Reducción de términos semejantes

Significa sumar o restar los coeficientes numéricos en una expresión algebraica, que tengan el mismo factor literal.

Se nombrar las ecuaciones 1 y 2 para hacer la reducción de términos.

Reducción de términos semejantes es una operación que tiene por objeto convertir en un solo término dos o más semejantes.

Tomando en cuenta el signo que está delante de cada coeficiente se procede a la suma de los coeficientes de la variable x, se restan los coeficientes de la variable y, luego se suman las igualdades.

$$2x - y = 2{,}260 \ (1)$$

$$\underline{x + y = 3{,}560} \ (2)$$

$$3x = 5{,}820$$

Al resolver las ecuaciones 1 y 2 se obtiene este resultado…

3x = 5,820 el tres que está multiplicando pasa dividiendo para obtener el valor de la variable x.

$$\frac{3x}{3} = \frac{5{,}820}{3}$$

$$x = 1{,}940$$

Sabiendo el valor de la variable x= 1,940; se procede a buscar la deuda de Andrés y la deuda de Roberto.

Para buscar la deuda de Roberto se sustituye el valor de la variable x en una de las ecuaciones.

a) $\begin{cases} 2x - y = 2{,}260 \ (1) \\ x + y = 3{,}560 \ (2) \end{cases}$

Se Escoge la ecuación #2, ¿Por qué? porque en esta ecuación se obtiene la deuda de Andrés más la deuda de Roberto que suman un total de RD. $3,560 pesos y se sustituye el valor de la variable x que es la que conocemos.

$$x + y = 3{,}560$$

$$1{,}940 + y = 3{,}560$$

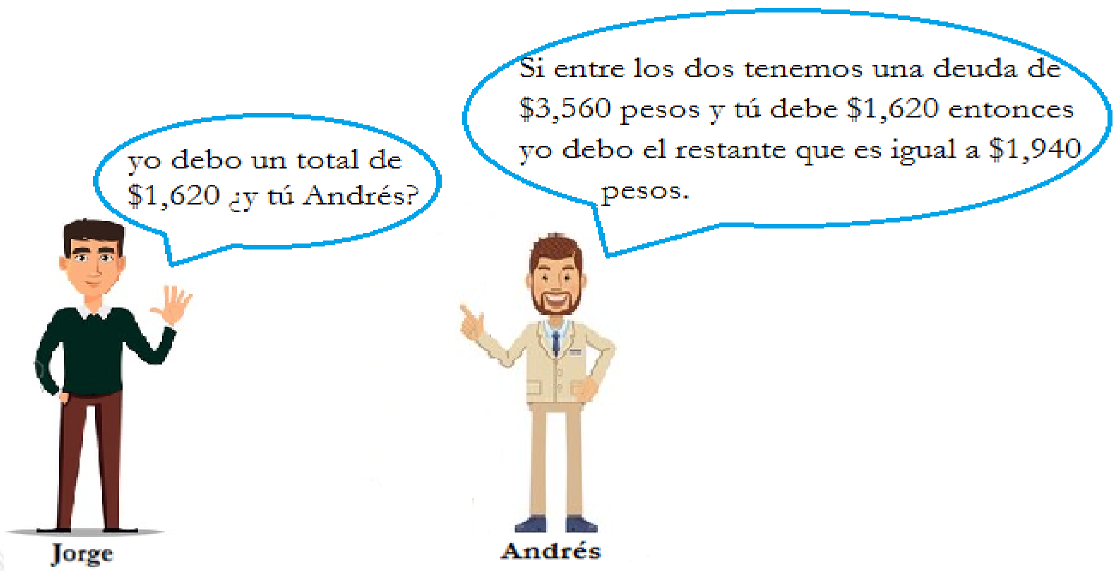
$$y = 3{,}560 - 1{,}940$$

$$y = 1{,}620$$

Paso 4. Conclusión y verificación

Para concluir se sustituyen los valores de cada variable para determinar la deuda de cada uno en la ecuación #2. x + y = 3,560

$$\left.\begin{array}{l}\text{Sabiendo que } x = 1{,}940 \\ \text{Sabiendo que } y = 1{,}620\end{array}\right\} \boxed{\text{Suman 3,560}}$$



4.10. Sistemas de ecuaciones lineales.

Los sistemas de ecuaciones lineales expresan varias ecuaciones lineales simultáneamente y admiten un tratamiento matricial. Para su resolución debe haber tantas ecuaciones como incógnitas y el determinante de la matriz ha de ser real y nulo. Geométricamente corresponden a intersecciones de líneas en un único punto (sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas), planos en una recta (dos ecuaciones lineales de tres incógnitas) o un único punto (tres ecuaciones lineales de tres incógnitas). Los casos en los que el determinante de la matriz es nulo no poseen solución.

$$5x - 3y + 4z = 8$$

$$-3x + 2y + 6z = 5$$

$$4x - 5y + 3z = 3$$

Si se consideran n ecuaciones de primer grado linealmente independientes definida sobre un cuerpo entonces existe solución única para el sistema si se dan las condiciones del teorema Rouche Frobenius, que puede ser calculada mediante la regla de Cramer que es aplicable a cualquier cuerpo. Si las ecuaciones no son linealmente independientes o no se dan las condiciones del teorema la situación es más complicada. Si el sistema se plantea sobre un anillo conmutativo que no sea un cuerpo, la existencia de soluciones es también más compleja.

RESUMEN DE LA UNIDAD IV

Una **variable** es una letra o un símbolo usado para representar una cantidad que puede cambiar.

Una **expresión algebraica** es una combinación de letras y números estar conectadas por operaciones matemáticas: adición, sustracción, multiplicación, división y potenciación.

Las **expresiones algebraicas racionales** son aquellas donde todos los exponentes de las letras son números enteros.

Las **expresiones algebraicas irracionales** son aquellas que tienen letras bajo el signo radical.

Un **polinomio** está ordenado con respecto a las potencias crecientes o decrecientes de determinada letra, llamada letra ordenatriz.

Según su grado:

Polinomio de Primer Grado.

Polinomio de Segundo Grado.

Polinomio de Tercer Grado.

Polinomio Nulo.

Según su número de términos.

Un **polinomio** es una expresión algebraica formada por un monomio o por la suma de varios monomios. A cada monomio se le llama término del polinomio.

Un **monomio** o término algebraico es el producto de un factor numérico o constante por una o más variables literales.

Multinomios (dos términos o más). A los multinomios con dos términos se le llama **binomios,** y los de tres términos, trinomios.

Polinomios enteros.

Polinomios especiales:

Polinomios completos con respecto a una letra.

Polinomios ordenados con respecto a una letra.

Polinomios completo y ordenado con respecto a una letra.

Polinomio homogéneo.

Polinomios idénticos.

Polinomio opuesto.

En cada término algebraico se distinguen el coeficiente numérico (que incluye el signo y constantes matemáticas) y la parte literal (que incluye variables con exponentes).

Se le llama coeficiente al número o factor que se le coloca delante de otro factor (en este caso un factor literal) multiplicarlo.

Los polinomios se ordenan en Descendente, es decir, de mayor a menor y Ascendente, es decir, de menor a mayor.

El **valor numérico de una expresión algebraica** es el valor real que se obtiene de dicha expresión.

Dos **términos son semejantes** si poseen idéntica parte literal, y estos a su vez tienen los mismos exponentes entre sí.

El **lenguaje algebraico** es una expresión algebraica que representa al lenguaje común.

Una **ecuación de primer grado o lineal** es una igualdad que involucra una o más variables a la primera potencia y no contiene productos entre las variables.

Los **sistemas de ecuaciones lineales** expresan varias ecuaciones lineales simultáneamente y admiten un tratamiento matricial.

ACTIVIDADES DE LA UNIDAD IV

En los problemas 1 - 3 escribe en orden ascendente y descendente. Identifique el grado y clasifique cada polinomio por el número de término.

1) $2x + 4x^2 - 5$

2) $y^2 - 3y^3 + 6y^5 + 3$

3) $2x^5 - 3x^4 + 4$

En los problemas 4 - 5. Resuelve por los cuatro (4) pasos generales.

4) El hermano mayor de una familia con tres hermanos tiene 4 años más que el segundo y éste 3 más que el menor. Si entre todos tienen la edad del padre que tiene 40 años, ¿Qué edad tiene cada hermano?

5) Marcos y Roberto desean repartir para sus negocios 290 limones de forma que Roberto reciba 40 limones más que Marcos. ¿Cuántos limones le corresponden a cada uno?

Expresa del lenguaje común al lenguaje algebraico

6) El doble de naranjas más 15. ________________________

7) El triplo de plátanos menos 10. ________________________

8) La diferencia de dos números más 30. ____________________

EJERCICIOS DE AUTOEVALUACIÓN DE LA UNIDAD IV

1) **Clara tiene 15 años, que es la tercera parte de la edad de su madre. ¿Qué edad tiene la madre de Clara?**

   a) 60
   b) 45
   c) 30

2) **En una tienda electrónica, Manuel vendió 8 artículos más que su compañera Adriana, al final del día según el inventario entre los dos vendieron 20 artículos. ¿Cuántos artículos vendieron cada uno?**

   a) Adriana vendió 6 artículos y Manuel 14 artículos.
   b) Adriana vendió 8artículos y Manuel 12 artículos.
   c) Adriana vendió 6 artículos y Manuel 10 artículos.

3) **En el local de repostería tearssweet Priscila compró 6 cupcakes más que su tía, y entre las dos compraron 20 cupcakes. ¿Cuántos cupcakes compró Priscila y cuanto su tía?**

   a) Priscila compró 5 cupcakes y su tía 15 cupcakes.
   b) Priscila compró 8 cupcakes y su tía 12 cupcakes.
   c) Priscila compró 7 cupcakes y su tía 13 cupcakes.

4) **Lucia y Sara quieren repartir 600 pesos de manera que Sara reciba 40 más que Lucia ¿cuántos pesos le corresponden a cada una?**

a) Sara 320 pesos y Lucia 280 pesos.
b) Sara 280 pesos y Lucia 320 pesos.
c) Sara 340 pesos y Lucia 260 pesos.

5) **La frase "cinco menos que el doble de un número p" se traduce algebraicamente como:**

a) $5 - p^2$
b) $2p - 5$
c) $5 - 2p$

6) **¿Cuál de las siguientes opciones es una solución de la ecuación $4x^2 - 8 = 56$?**

a) 4
b) 8
c) 16

7) **La frase "el triplo de un número menos 15" se traduce al lenguaje común:**

a) $15 - 3x$
b) $3x - 15$
c) $15 + 3x$

8) **La expresión tres plátanos y 2 guineos costaron $100 y 5 plátanos y 6 guineos costaron $20. Se representa con la expresión:**

a) $\begin{cases} 3x + 2y = 100 \\ 5x + 6y = 20 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 2y = 10 \\ 2x + 5y = 120 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 6x + 2y = 100 \\ x + y = 20 \end{cases}$

9) **¿Cuál de la siguiente expresión es un polinomio de tercer grado?**

a) $x^4 + 3x^3 + x$

b) $x^3 + 2x^2 + x$

c) $5x^2 + x$

10) **¿Cuál de la siguiente expresión es descendente?**

a) $3x^4 + 4x^3 + x^2$

b) $2x^2 + x^3 - x^4$

c) Ambas son correctas

BIBLIOGRAFÍA DE LA UNIDAD IV

1. Clasificación De Polinomios. Recuperado el 20 de septiembre del 2019 de https://www.clasificacionde.org/clasificacion-de-polinomios/.
2. Expresiones Algebraicas. Recuperado el 20 de septiembre del 2019 de https://conceptodefinicion.de/expresiones-algebraicas/.
3. Gonzáles, D. (2011). Algebra Básica Teoría y Práctica. Segunda Edición.Impresiones Montenegro,Perú.
4. Gómez, N. (2019). Algebra y Geometría. Ediciones UAPA. Santiago de los Caballeros, República Dominicana.
5. Morales, E. (2019) Álgebra Superior I. Ediciones UAPA. Santiago.
6. Ojeda. E. (2006). Matemática. Ediciones COREFO SAC.Lima.Perú.
7. Peña, R. (2014). Matemática 4 –Nivel Medio. Susaeta Ediciones 2010. Printed in Dominican Republic (Editora Imprentur, S, R, L.
8. Peña, R. (2018). Matemática 1 –Nivel Medio. Susaeta Ediciones 2010. Printed in Dominican Republic (Editora Imprentur, S, R, L.
9. Peña, R. (2018). Matemática 2 –Nivel Medio. Susaeta Ediciones 2010. Printed in Dominican Republic (Editora Imprentur, S, R, L.
10. Sullivan, M. (2013). Álgebra y Trigonometría Educación media superior. Novena Edición. Pearson Educación de México, S.A. de C.V, México.
11. Sullivan, M. (2006). Álgebra y Trigonometría Educación media superior. Séptima edición. Pearson Educación de México, S.A. de C.V, México.

UNIDAD V

LONGITUD, PERÍMETRO Y ÁREA CON FIGURAS GEOMÉTRICAS

Autores

Yarileidy Ortega

Emelanio Jiménez

Yenny Figueroa

ORIENTACIONES PARA EL ESTUDIO DE LA UNIDAD V

La geometría es de suma importancia ya que todo nuestro entorno está lleno de formas geométricas con significados concretos: puertas, ventanas, casas, espacios deportivos y recreativos. A partir de estas situaciones cotidianas se puede fomentar el desarrollo de los conceptos geométricos.

El objetivo de esta unidad es aportar al lector de matemáticas unos ejemplos básicos de una manera práctica y dinámica, de cómo reconocer en su contexto figuras geométricas y así poder determinar la longitud, el perímetro y área de las diferentes figuras geométricas que se presentan en nuestro entorno.

COMPETENCIAS DE LA UNIDAD V

Competencias

- Comprende el concepto de longitud, perímetro y área para el desarrollo de conocimientos significativos.
- Identifica situaciones de la vida cotidiana que involucran longitud, área y perímetro.
- Aplica concepto de longitud, perímetro y área en la resolución de problemas de la vida cotidiana.

ESQUEMA DE CONTENIDO DE LA UNIDAD V

5.1 Longitud

5.2 Perímetro

5.3 Área

5.4 Unidades de medidas de la longitud, perímetro y área

5.5 Figuras geométricas

5.5.1 Triángulo

5.5.2 Cuadrado

5.5.3 Rectángulo

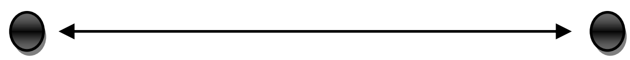
5.5.4 Rombo

5.5.5 Trapecio

5.5.6 Circunferencia

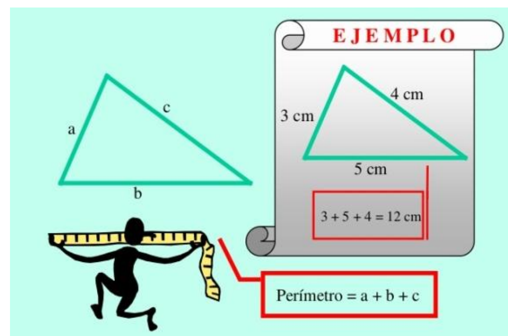
5.1 Longitud

Es una magnitud física que permite determinar la distancia entre dos puntos en el espacio.



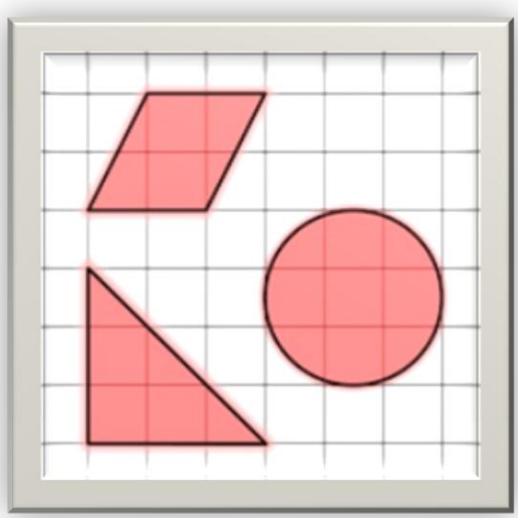
5.2 Perímetro

Es la suma de las longitudes de los lados de una figura geométrica plana.



5.3 Área

Es un concepto métrico que permite asignar una medida a la extensión de una superficie, expresada en matemáticas como unidades de medida denominadas unidades de superficie. Es decir, es la región o superficie encerrada por una figura geométrica.



5.4 Unidades de medidas de la longitud, perímetro y área

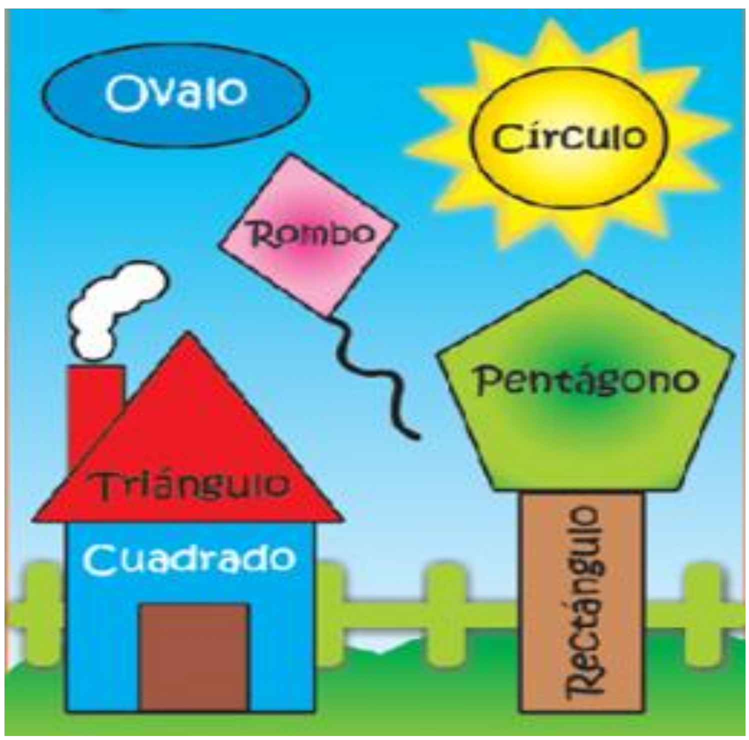
Las unidades de medidas que utilizamos para medir el área son el metro o sus submúltiplos.

Unidades de Medidas en base a Metro (m).

Unidad	**Simbología**	**Equivalencia**
Metro	m	1m
Kilometro	km	1,000 m
Hectómetro	hm	100 m
Decámetro	Dm	10 m
Decímetro	dm	0.1 m
Centímetro	cm	0.01m
Milímetro	mm	0.001 m

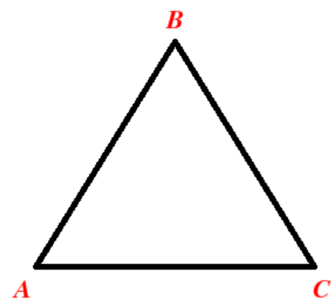
5.5 Figuras Geométricas

Una figura geométrica es la representación visual y funcional de un conjunto no vacío y cerrado de puntos en un plano geométrico. Es decir, figuras que delimitan superficies planas a través de un conjunto de líneas (lados) que unen sus puntos de un modo específico. Dependiendo del orden y número de dichas líneas hablaremos de una figura o de otra.



5.5.1 Triángulo:

Es un polígono de tres lados, los puntos comunes a cada par de lados se denominan vértices del triángulo, un triángulo tiene tres ángulos interiores.

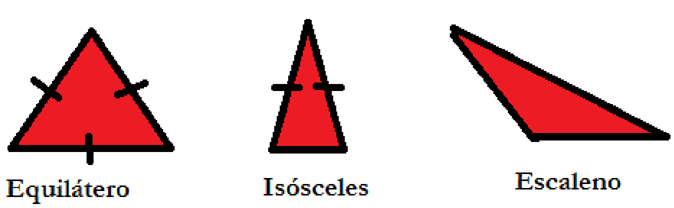


Los vértices de un triángulo se escriben con letras mayúsculas, por tanto que los vértices del triángulo son los puntos A, B, C. Los lados son los segmentos AB, BC y AC (llamados así para indicar los dos vértices que une cada uno de ellos). En todos los triángulos, los ángulos interiores que forman los lados suman 180 grados.

Clasificación de los triángulos.

Según sus lados:

- **Equilátero:** tiene sus tres lados iguales.
- **Isósceles:** tiene sus dos lados iguales.
- **Escaleno:** no tiene ninguno de sus lados iguales.

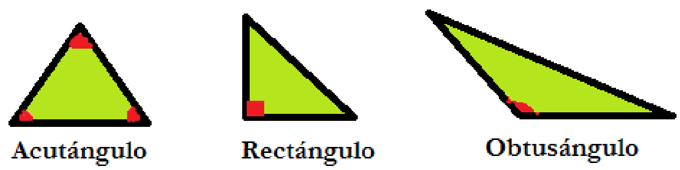


Según sus ángulos:

Triangulo rectángulo: tiene un ángulo recto.

Triángulo acutángulo: tiene sus tres ángulos agudos.

Triangulo obtusángulo: tiene un ángulo obtuso.



Área de un Triángulo

El área de un triángulo es igual a la base por la altura dividida por dos.

$$A = \frac{\text{b x h}}{2}$$

Ejemplo

1- Determina el área de un triángulo equilátero que mide en cada lado 3cm y de altura 2.6cm

Solución: -En este caso se procede a sacar los datos. -Colocando la fórmula y luego sustituyo los datos. -Multiplico el valor de la base por el valor de la altura. -El producto de la base por la altura la

Datos

b=3cm

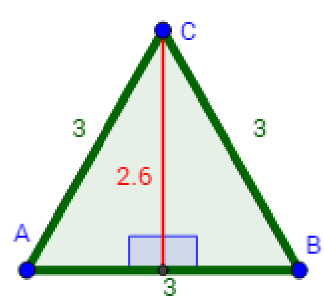
h=2.6cm

A=?

Solución

$$A = \frac{3cm\ x\ 2.6cm}{2}$$

$$A = \frac{7.8cm^2}{2} = \mathbf{3.9cm^2}$$



Perímetro del triángulo

El **perímetro** en toda figura geométrica corresponde a la suma de la longitud de todos sus lados, cabe destacar que el cálculo variará en función del tipo de triángulo que se esté trabajando.

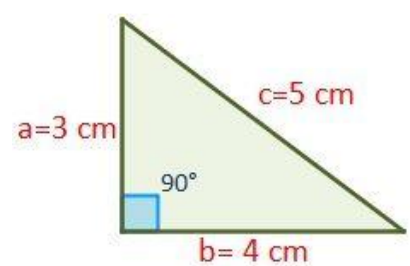
$P = NL$ Se utiliza si es regular.

$P = L1 + L2 + L3$; Se utiliza si es irregular, es decir, si tiene todas las medidas diferentes.

Ejemplo

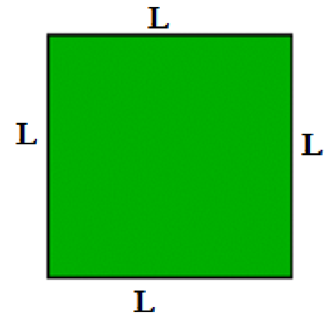
Determine el perímetro del triángulo rectángulo con los tres lados conocidos

Solución: -En este caso se puede verificar que el triángulo es irregular, es decir, su lado tiene medidas diferentes, por lo que utilizo la formula P=L+L+L. -Ahora se procede a sacar los datos. -Coloco la fórmula y luego sustituyo los datos. -Sumo los valores y así obtengo el perímetro.



Datos	**Solución**	**Respuesta**
a=3 cm	P = a+b+c	El perímetro es 12 cm
b=4 cm	P = 3 cm + 4 cm + 5 cm	
c=5 cm.	P=12cm	

5.4.2 Cuadrados



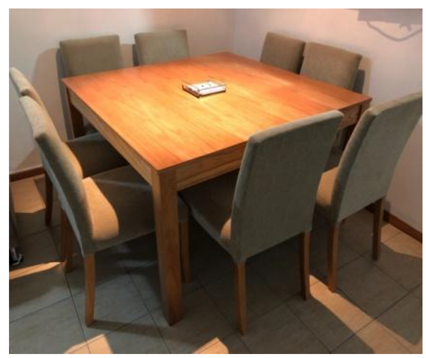
Es un paralelogramo que tiene sus lados opuestos paralelos e iguales.

Área del cuadrado

El área del cuadrado es igual a lado al cuadrado $A=L^2$

Ejemplo

La mesa del comedor de la casa de Mari tiene forma cuadrada. Ella desea colocar un cristal en la parte superior para evitar que la pintura se raye.



Cada lado de la mesa mide 3m, ¿cuál es el área del cristal que necesita Mari para cubrir la mesa?

Solución: -Procedo a sacar los datos. -Coloco la fórmula y luego sustituyo los datos. -Resuelvo la potencia y así obtengo el área.

Datos

$L=3m$

$A=?$

Solución

$A= L^2$

$A= (3m)^2$

$A=3m \times 3m$

$A= 9m^2$

Respuesta

Mari necesita un cristal de $9m^2$

Perímetro del cuadrado

Es la suma de la longitud de cada uno de sus lados del cuadrado. Con el fin de realizar el cálculo, hay que medir cada lado de un cuadrado.

Ejemplo:

Determine el perímetro del cuadrado cuyos lados miden 4cm.

Solución: Procedo a sacar los datos. -Coloco la fórmula y luego sustituyo los datos.-Sumo los valores y así obtengo el perímetro.

Datos

L= 4cm

P =?

Solución

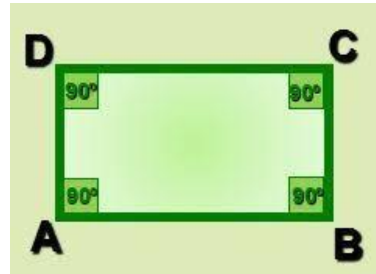
P = L+L+L+L

P = (4+4+4+4) cm

P =16cm

5.4.3 Rectángulo

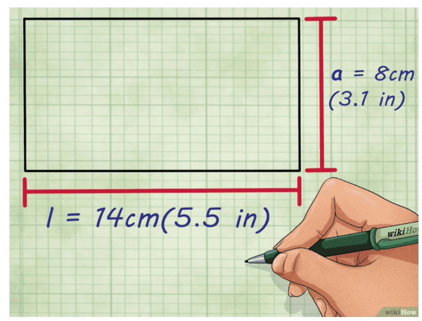
Es un paralelogramo de cuatro lados cuyos ángulos son todos rectos (90^0); por lo tanto, los lados opuestos son paralelos y de la misma longitud.



Perímetro del rectángulo

Para hallar el perímetro del rectángulo se multiplica por dos la suma de la base y la altura:

$$P = 2(b + h)$$



Ejemplo:

La casita de Francisca tiene una puerta que de largo mide 14 cm y de ancho 8 cm, el vecino Enríquez quiere saber cuántos centímetros hay de por medio entre dichas cantidades, verificándolo mediante el perímetro; para así determinar si puede hacer las de el de la misma medida.

Solución: Después que verifico el largo y ancho, sustituyo en la fórmula los valores dados, de ahí paso a sumar la base y la altura de dicha figura, continúo multiplicando por 2 la suma de ambos y el resultado de dicha multiplicación es la respuesta a Francisca.

Datos

b= 14cm

h=8cm

Solución

$$p = 2(b + h)$$

$$p = 2(14 + 8)$$

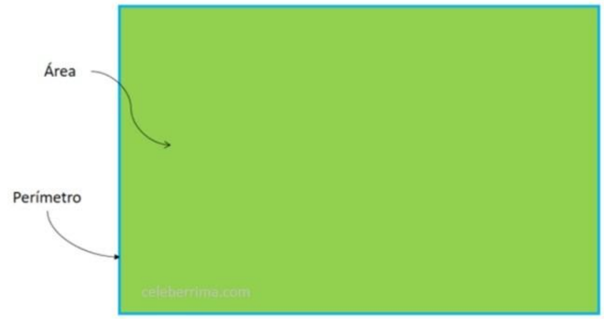
$$p = 2(22)$$

$$\boldsymbol{p = 44cm}$$

Área del rectángulo

Para hallar el área de nuestro rectángulo recurrimos a la fórmula:

$$A = b\ x\ h$$



Ejemplo:

Una de las ventanas de la casa de Emelanio tiene dos puertitas rectangulares, de 80cm de alto y 50cm de ancho. ¿Él quiere saber cuál es el área total de la ventana?

Solución

- Antes de calcular el área sumamos el ancho de las dos puertitas para obtener el ancho de la ventana.
- Colocamos la fórmula del área del rectángulo.
- Sustituimos los valores.
- Obtenemos el área total de la ventana.

Ancho de la ventana

50cm +50cm= 100cm

Área Total

A= b x h

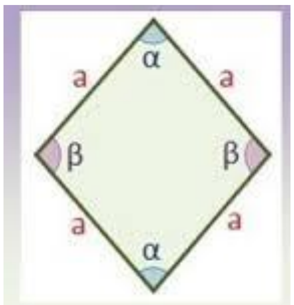
A=100 cm x 80cm

A= 8,000cm^2

5.4.4 Rombo

Es una figura de cuatro lados, los cuales son todos iguales; debemos saber que los lados opuestos son paralelos y los ángulos opuestos son iguales.

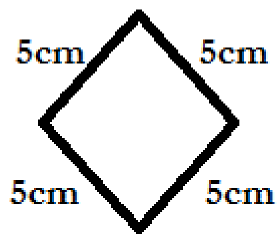
Ejemplo del rombo:



Perímetro del rombo

Es cuatro veces el valor del lado.

$$P = 4.L$$



Ejemplo:

Determine el perímetro del terreo en forma de rombo cuyos lados miden 5cm respectivamente5cm.

Solución: -Procedo a sacar los datos. -Coloco la fórmula y luego sustituyo los datos. -Multiplico por cuatro el valor del lado.

Datos

L=4cm

P=?

Solución

$$P = 4.L$$

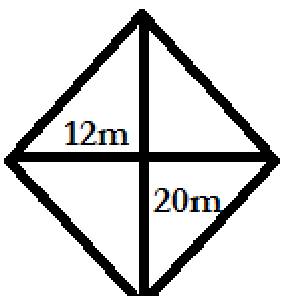
$$P = 4(5cm)$$

$$\boldsymbol{P = 20cm}$$

Área del rombo

Es igual al producto de las diagonales dividida entre dos.

$$A = \frac{D.d}{2}$$



Solución: -Procedo a sacar los datos. -Coloco la fórmula y luego sustituyo los datos. -Multiplico las diagonales y luego el producto obtenido lo divido por dos.

Ejemplo:

Halla el área de un rombo cuyas diagonales miden 20m y 12m:

Datos

D=20m

d=12m

Solución

$$A = \frac{D.d}{2}$$

$$A = \frac{(20m)(12m)}{2}$$

$$A = \frac{240\, m^2}{2}$$

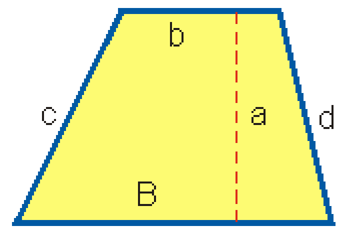
$$A = 120m^2$$

Respuesta:

El área del rombo es 120 m^2

5.4.5 Trapecio

Es un cuadrilátero con dos lados paralelos.



Perímetro del trapecio

Es igual a la suma de los lados de dicha figura.

$$\boldsymbol{p = l + l + l + l}$$

Área de un Trapecio

El área de un trapecio es igual al producto de la altura **(h)** por la semisuma de las bases **(B + b)** dividido por dos.

$$\boldsymbol{A} = \frac{\mathrm{h(B+b)}}{2}$$

Ejemplo:

Calcula el área de un trapecio de 10 y 20 cm de bases y 15 cm de altura.

Solución: -Procedo a sacar los datos. -Coloco la fórmula y luego sustituyo los datos. -Sumo las bases y el resultado obtenido lo multiplico por la altura.

Sol **Datos**

h=15cm

B=20cm

b=10cm

$$\boldsymbol{A} = \frac{\mathrm{h\ (B+b)}}{2}$$

$$\boldsymbol{A} = \frac{\mathrm{15cm\ (20cm + 10cm)}}{2}$$

$$\boldsymbol{A} = \frac{\mathrm{15cm\ (30cm)}}{2}$$

$$\mathrm{A} = \frac{\mathrm{450cm}}{2}$$

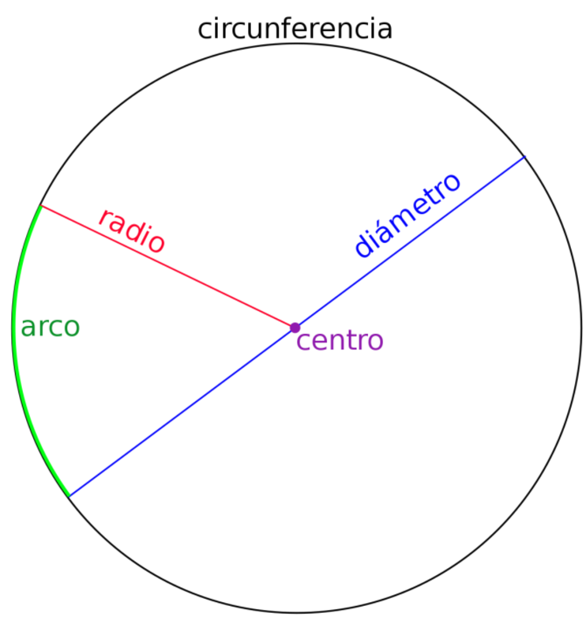
$$\mathrm{A} = \boldsymbol{225cm^2}$$

Circunferencia

La circunferencia es una línea curva cerrada cuyos puntos están todos a la misma distancia de un punto fijo llamado centro.

Elementos de la circunferencia

- **El centro**: es el punto del que equidistan todos los puntos de la circunferencia.
- **El radio:** es el segmento que une el centro de la circunferencia con un punto cualquiera de la misma.
- **El diámetro:** es una cuerda que pasa por el centro de la circunferencia.
- **Un arco:** es cada una de las partes en que una cuerda divide a la circunferencia.



Longitud de la circunferencia

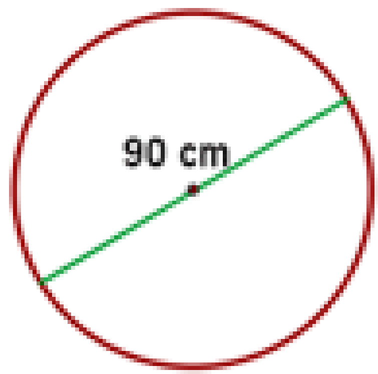
La longitud de una circunferencia es igual a pi (π) por el diámetro o dos veces elpi por el radio.

$$L = \pi . d$$

$$L = 2.\pi.r$$

Ejemplos:

Calcular la longitud de una rueda de 90 cm de diámetro.



Solución: -En este caso se nos da el diámetro por lo que utilizaremos la fórmula **L=π.d** -Procedo a sacar los datos. -Coloco la fórmula y luego sustituyo los datos. -realizo la multiplicación de los valores.

Datos:

Diámetro (d) = 90 cm
Pi (π) = 3.14

Solución:

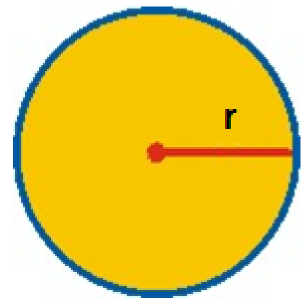
L = π . d

L=(3.14) (90 cm)

L = 282.60 cm

Círculo

Se denomina círculo a la región del plano limitada por una longitud.



Área del círculo

El área de un circulo es igual al pi (π) multiplicado por el radio al cuadrado (r^2).

$$\mathbf{A=\pi\ r^2}$$

Ejemplo:

Una máquina de dulces hace monedas de chocolate. El radio de cada moneda de chocolate es 8mm. ¿Cuál es el área de cada moneda de chocolate?

Solución: -Coloco la formula y sustituyo los valores dados.

-Multiplico los valores. **-** Obtengo la medida de la moneda de chocolate.

$\mathbf{A=\pi\ r^2}$

$A= (3.14)\ (8mm^{2)}$

$\mathbf{A=25.12mm^2}$

RESUMEN DE LA UNIDAD V

- Longitud, es una magnitud física que permite determinar la distancia entre dos puntos del espacio.
- Perímetro, es la suma de las longitudes de los lados de una figura geométrica plana.
- Área, es la región o superficie encerrada por una figura geométrica.
- Figuras Geométricas, figuras que delimitan superficies planas a través de un conjunto de líneas (lados) que unen sus puntos de un modo específico.
- Triángulo, es un polígono de tres lados. Se clasifica por sus lados en: equilátero, isósceles y escaleno. Por sus ángulos: rectángulo, acutángulo y obtusángulo.

  Área: $A = \frac{bxh}{2}$ Perímetro: $P=L_{1+}L_2+L_3$

- Cuadrado, es un cuadrilátero que tiene sus lados opuestos paralelos.

  Área: $A = L^2$ Perímetro: $P=L_{1+}L_2+L_3+L_4$

- Rectángulo, es una figura de cuatro lados cuyos ángulos son todos rectos (90^0); por lo tanto, los lados opuestos son paralelos y de la misma longitud.

  Área: $A = bxh$ Perímetro: $P = 2(h + b)$

- Rombo, es una figura de cuatro lados, los cuales son todos iguales; debemos saber que los lados opuestos son paralelos y los ángulos opuestos son iguales

  Área: $A = \frac{Dxd}{2}$ Perímetro: $P = 4L$

- Trapecio, es un cuadrilátero con dos lados paralelos.

  Área: $A = \frac{h(B+b)}{2}$Perímetro: P=$L_{1+}L_2+L_3+L_4$

- Circunferencia, es la curva que encierra a un círculo. Se denomina círculo a la región del plano limitada por una circunferencia.

  Longitud de la Circunferencia: $L = 2\pi r$ o $L = \pi d$

  Área del círculo: $A = \pi r^2$

ACTIVIDADES DE LA UNIDAD V

I. Encierra en un círculo la respuesta que complete correctamente el enunciado

1. Son figuras que delimitan superficies planas a través de un conjunto de líneas (lados) que unen sus puntos de un modo específico:

    a) Circunferencia
    b) Figuras geométricas
    c) Plano
    d) Cuadrados

2. La región o superficie encerrada por una figura geométrica se le llama:

    a) Área
    b) Superficie
    c) Longitud
    d) Perímetro

3. El polígono formado por tres lados es un:
    a) Cuadrado
    b) Rombo
    c) Círculo
    d) Triángulo

4. La magnitud física que permite determinar la distancia entre dos puntos del espacio es:

   a) Longitud
   b) Área
   c) Perímetro
   d) Superficie

5. Es la suma de las longitudes de los lados de una figura geométrica plana:

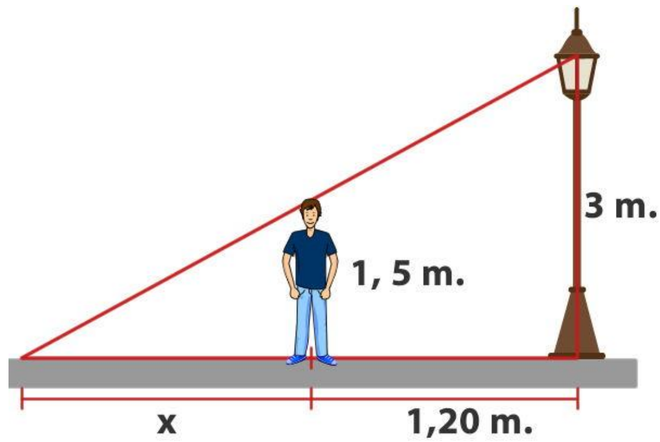
   a) Área
   b) Perímetro
   c) Longitud
   d) Perímetro

II. Complete los espacios en blanco

1. Los triángulos se clasifican según sus __________ y sus __________.
2. _____________ es una magnitud física que permite determinar la distancia entre dos puntos del espacio.
3. A la curva que encierra el círculo se le llama _______________.
4. La suma de las longitudes de los lados de una figura geométrica plana se conoce como_______________.
5. La formula $A = L^2$ se usa para determinar el área del _____________.

III. Determine lo que se pide

1- El señor Carmelo Santos desea saber el área, la longitud y el perímetro del triángulo que se forma con la lámpara del parque.

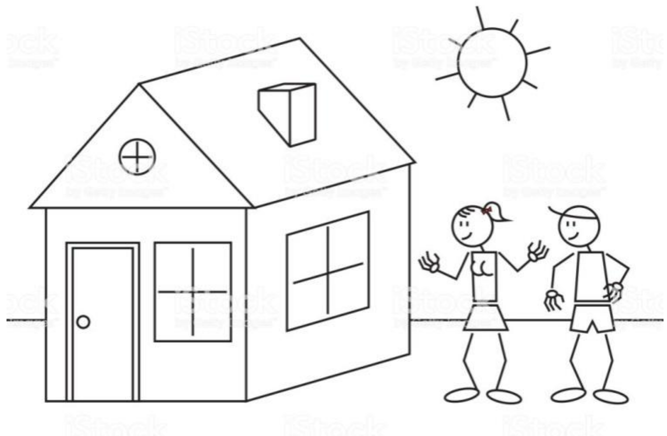


2- La señora Sofía Castellanos está interesada en comprar un terreno, marcado en la imagen, por la suma de RD$300,000.00 el cual mide 18 m de ancho y 24 m de largo, necesita saber el área, el perímetro y la longitud del terreno para poder hacer el pago del mismo.

3- Los padres de Denny quieren saber qué cantidad de madera se necesitan para construir dos puertas de su casa, para comprarlos de manera exacta; para esto se debe calcular: el perímetro que conforma la parte donde va ubicada la puerta, sabiendo que mide 9cm de largo y 4 cm de ancho. ¿Qué cantidad van a necesitar?

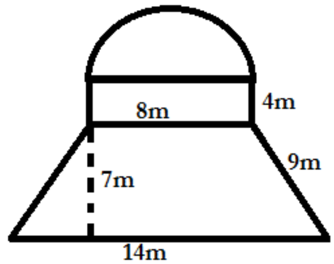
4- El cuñado de Francisco que es abogado necesita que le ayude a determinar el área que tiene la persiana del frente, para esto debe calcular el área; ya que el perímetro del rectángulo que forma dicha persiana es de 40 metros.

5- Mis sobrinos quieren determinar qué medida tiene el rombo que se forma en la parte trasera de la casa, para esto deben calcular el perímetro que lo conforma, pero vemos que un lado mide 5cm, ¿Cuántos medirán los otros lados?

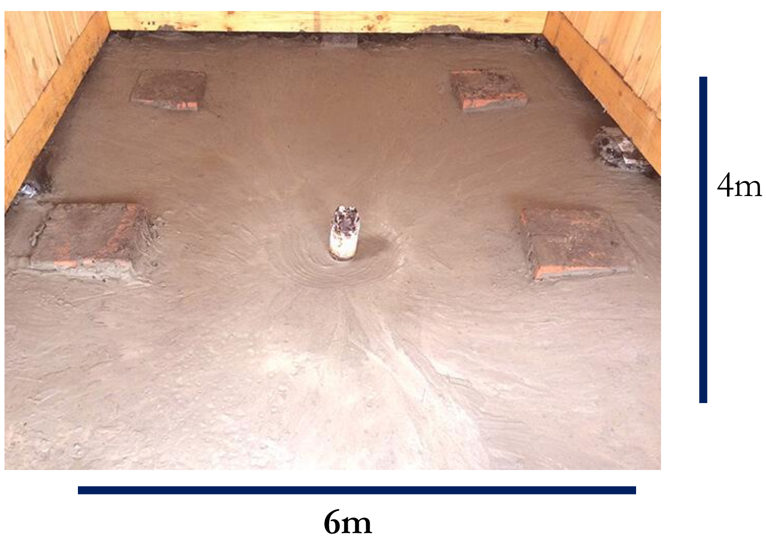


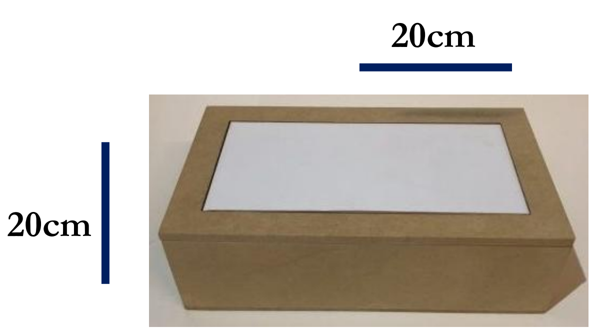
6- Yani quiere cambiar la puerta de casa la cual esta mala condición ¿Cuál es el área de la puerta de su casa? sabiendo que de largo mide 12 cm y de ancho 4 cm.

7- Determine el área total de la siguiente figura



8- Se cubrirá el piso de un baño en construcción que mide 4m por 6m, utilizando cerámicas de 20cm por 20cm; la caja de cerámicas tiene 10 piezas. ¿Cuál es el costo total, si la caja de cerámica se vende a RD$650 pesos?



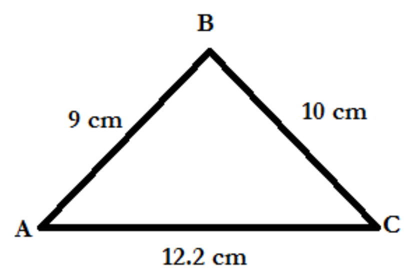


9- La rueda de la bicicleta de Virginia tiene 50 cm de diámetro. ¿Cuánto habrá recorrido cuando la rueda ha dado 20 vueltas?

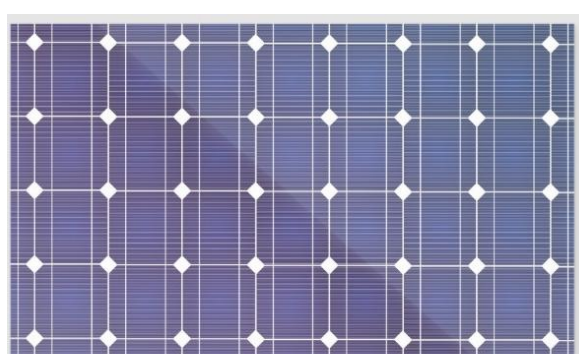
EJERCICIOS DE AUTOEVALUACIÓN DE LA UNIDAD V

I- Encierra en un círculo la respuesta que complete correctamente el enunciado

1. Los lados de un triángulo escaleno miden 9cm, 10cm y 12.2cm respectivamente. Su perímetro es:
   a) 31.2 cm
   b) 31.1 cm
   c) 32.2 cm
   d) 29.2 cm



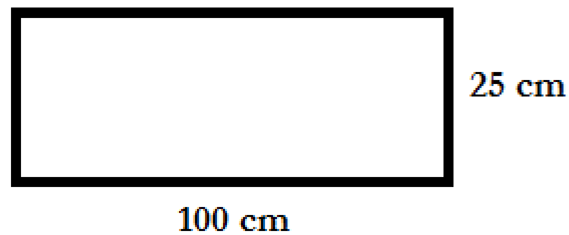
2. Un panel solar de forma rectangular tiene 30 m de largo por 15 m de ancho. El perímetro del panel solar es:



   a) 90 m
   b) 90 m^2
   c) 90
   d) 90 m^3

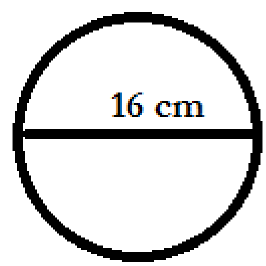
3. El área de un rectángulo que tiene 100 cm de base y 25 cm de altura es:

   a) 2,500 m
   b) 2,500 cm^2
   c) 2,500 cm
   d) 2,500 m^2



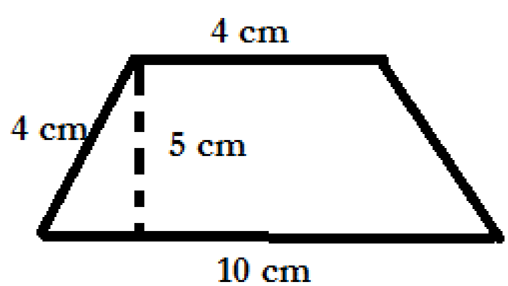
4. Un circulo tiene un diámetro de 16 cm su área es:

   a) 200.96 cm^2
   b) 803.84 m^2
   c) 200.96 m^2
   d) 803.84 cm^2
   e)



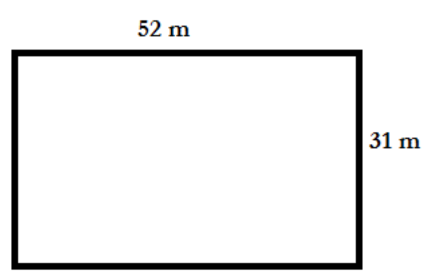
5. El área del trapecio del grafico es:

   a) 28 m
   b) 28 m^2
   c) 28 cm^2
   d) 28cm



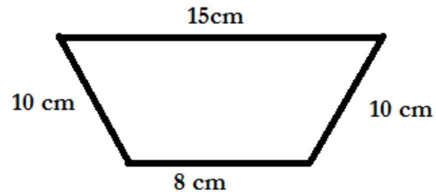
6. El área del rectángulo de la figura es:

   a) 1,612 m
   b) 1,612 cm
   c) 1,612 m^2
   d) 1,612 cm^2

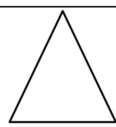
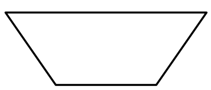
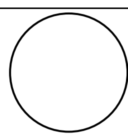
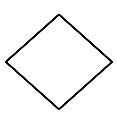
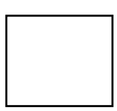


7. El perímetro del trapecio del grafico es:

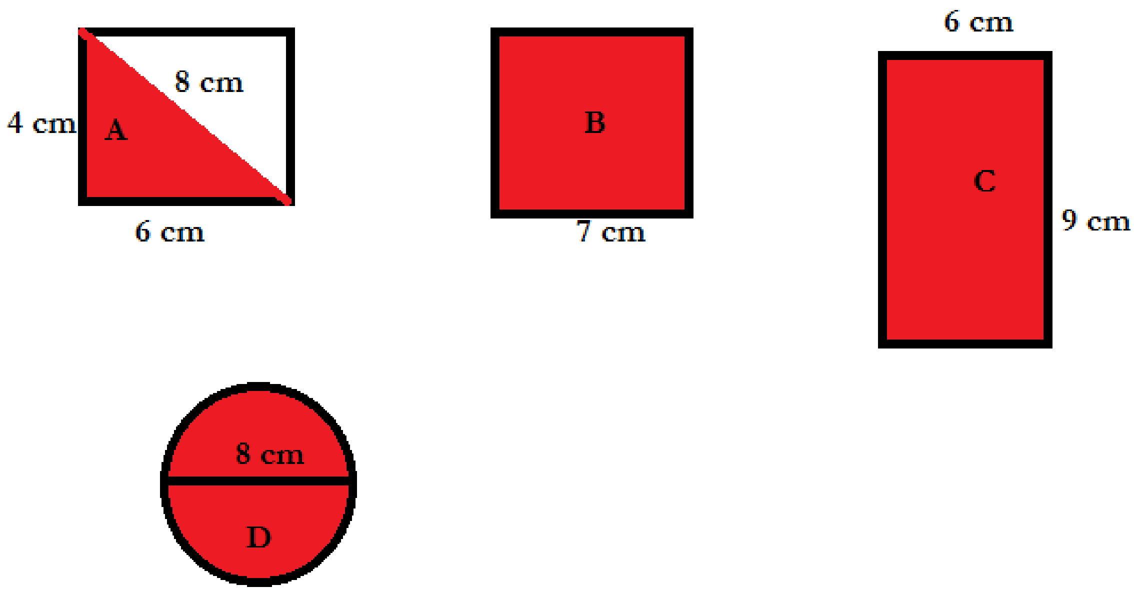
   a) 43 m
   b) 43 cm
   c) 43 m^2
   d) 43 cm^2



II- Al lado de cada figura geométrica coloque la fórmula para determinar el área.

Figura	fórmula
	
	
	
	
	
	

III- Determine el área y el perímetro de la figura sombreada (A, B, C, D)



BIBLIOGRAFÍA DE LA UNIDAD V

1. Costa, A. & Buser, P. (2010). Curso de Geometría Básica. UNED. Sanz y Torres. Primera Edición. Madrid, España.
2. Gómez, N. (2016). Matemática en la Educación Primaria II. Edición 2. República Dominicana.
3. Izquierdo, Fernando. P (2012). Geometría Descriptiva superior y aplicada. Edición 24°. México.
4. Peña, R.(2010). Matemática 2. Educación Media. Ediciones Susaeta. Santo Domingo. República Dominicana.
5. Rodríguez, I. Javier. P(1963). Geometría Descriptiva. Tamo ll. México
6. https://www.ditutor.com/geometria/triangulo.html. Recuperado 23/10/2019.
7. https://www.ecured.cu/Cuadrado. Recuperado 24/10/2019.
8. https://ejerciciosresueltos.net/geometria/triangulos/ejercicios-de-triangulos. Recuperado 08/11/2019.

UNIDAD VI

EL TEOREMA DE PITÁGORAS Y LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

Autores

Alejandro Rosario

Rina Elizabeth Mieses

Víctor Manuel Batista

ORIENTACIONES PARA EL ESTUDIO DE LA UNIDAD VI

En esta unidad se aborda el tema Teorema de Pitágoras y las Razones Trigonométricas. Es de gran importancia, ya que se utiliza para resolver situaciones problemáticas del diario vivir.

Esta aplicación es una herramienta para resolver problemas en el campo de la trigonometría.

El desarrollo pedagógico de esta unidad contiene conceptos, explicaciones y ejercicios que permiten trabajar dicho contenido de forma tal que el lector pueda asimilar el desarrollo de los procesos de manera novedosa.

ESQUEMA DE LA UNIDAD VI

6.1 Historia de Pitágoras de Samos

6.2 Teorema de Pitágoras

6.3 Ángulo de elevación

6.4 Ángulo de depresión

6.5 Ejemplos de teorema de Pitágoras

6.6 Razones trigonométricas

6.6.1 Función del Seno

6.6.2 Función del Coseno

6.6.3 Función de la Tangente

6.7 Ángulos Notables

6.8 Ángulos Cuadrantales

6.9 Ejemplos de las razones trigonométricas

COMPETENCIAS DE LA UNIDAD VI

- Reconoce el Teorema de Pitágoras, su importancia, historia y transcendencia en la matemática y la humanidad para resolver problemas de la vida cotidiana.
- Utiliza el teorema de Pitágoras para calcular longitudes desconocidas en figuras y cuerpos geométricos para aplicarlo en la resolución de problemas de entorno.
- Analiza demostraciones del teorema de Pitágoras para aplicarlo en la resolución de problemas de la vida diaria.
- Muestra habilidad para interpretar y aplicar las razones trigonométricas en diferentes contextos.
- Muestra dominio de la definición de función trigonométrica, reconociendo su utilidad en la solución de situaciones problemáticas del diario vivir.
- Representa de forma gráfica la solución de problemas trigonométricos.
- Utiliza modelos matemáticos para resolver problemas que involucren razones trigonométricas para tomar decisiones óptimas en diferentes contextos en la vida cotidiana y laboral.
- Determina las diferentes razones trigonométricas del triángulo rectángulo para diferentes ángulos.

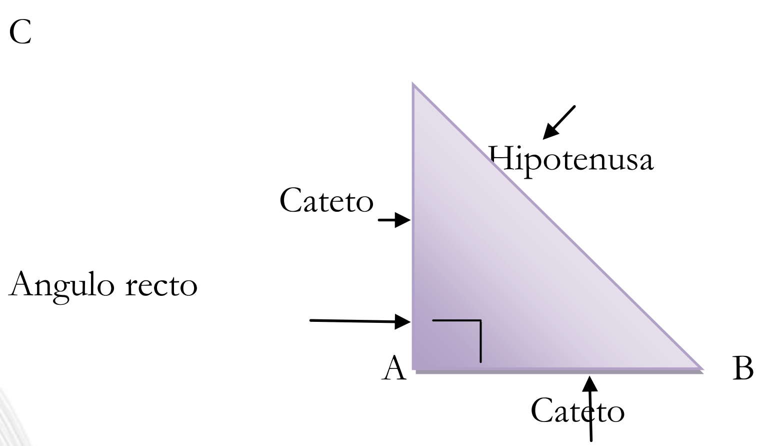
6.1 Historia de Pitágoras de Samos

Pitágoras de Samos*, fue un filósofo y matemático griego fundador del movimiento filosófico y religioso llamado pitagorismo, nacido alrededor del año 570 a.C. Hijo del comerciante Mnesarchus y de Pythais a quien estando embarazada una pitonisa profetizó que daría a luz a un hombre bello, sabio y beneficioso para la humanidad.

Pitágoras realizó numerosos viajes a lo largo de su vida visitando Egipto, Arabia, Fenicia, Judea Babilonia e incluso la India con el objetivo de adquirir un gran conocimiento y para adquirir una gran cantidad de información sobre los cultos secretos o místicos a los dioses.

Muchos de los descubrimientos matemáticos y científicos fueron atribuidos a Pitágoras entre los que se incluye su famoso Teorema de Pitágoras, no obstante, también hizo descubrimientos en el campo de la música, la astronomía y la medicina.

Elementos de un triángulo rectángulo

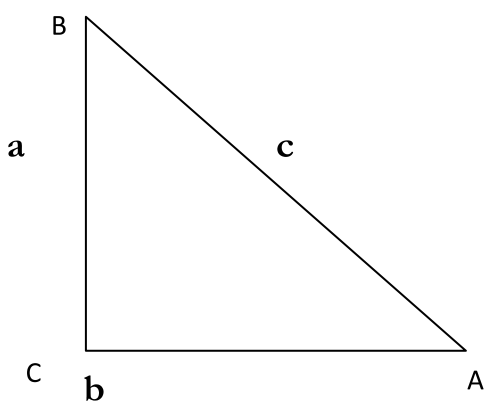


Definición de teorema

Es una proposición que puede ser demostrada a partir de axiomas y teoremas ya demostrados anteriormente. Se puede catalogar el teorema como una afirmación de importancia, ya que existen lemas y corolarios que son de menor rango.

6.2 Teorema de Pitágoras

El teorema de Pitágoras establece que, en todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las respectivas longitudes de los catetos.

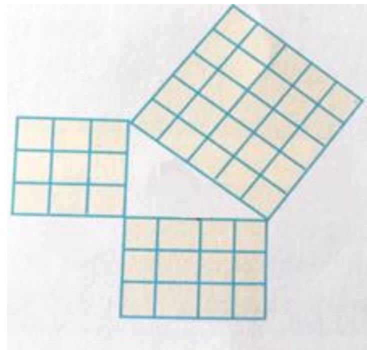


$$\boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2}$$

Se lee el cuadrado de c ($\boldsymbol{c^2}$) es igual al cuadrado de a (a^2) más el cuadrado de b (b^2).

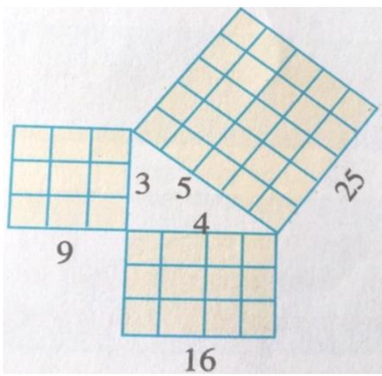
Demostración gráfica del teorema de Pitágoras.

Cuentan que Pitágoras, observando un pavimento hecho con losas, triangulares, se dio cuenta que, considerando un triángulo, las áreas de los cuadrados que se pueden construir sobre los lados cumplían lo siguiente: El área del cuadrado correspondiente al lado mayor es igual a la suma de las áreas de los cuadrados que pueden construir sobre los otros dos lados de dichas losas.



Ejemplo No.1

Si se tiene un triángulo rectángulo cuyos lados miden 3m y del otro lado mide 4m y la hipotenusa mide 5m compruebe el Teorema de Pitágoras.

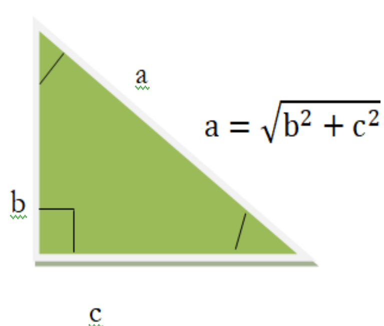


Este resultado es conocido como el Teorema de Pitágoras.

Para encontrar la hipotenusa de un triángulo rectángulo.

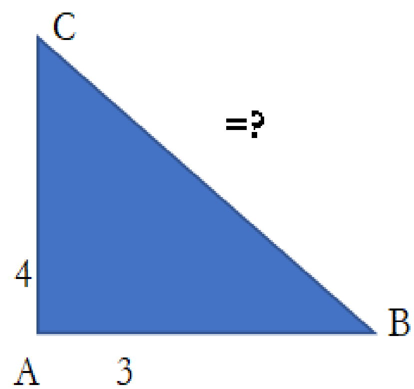
Esta es la fórmula $b^2 + c^2 = c^2$ para hallar el valor de a, despejamos en la ecuación general.

Veamos



Ejemplo No.2

Si $b = 4$, $c = 3$. Compruebe el teorema de Pitágoras.



Solución

En este caso se debe comprobar que:

$$4^2 + 3^2 = 5^2$$

$16 + 9 = 25$

$25 = 25$

Aplicando el teorema de Pitágoras, determine el lado BC

Solución

$a^2 + b^2 = c^2$

$a = \sqrt{b^2 + c^2}$

$a = \sqrt{(4)^2 + (3)^2}$

$a = \sqrt{16 + 9}$

$a = \sqrt{25}$

$a = 5$

Él 5 es la hipotenusa que es la raíz de la sumatoria de los catetos al cuadrado.

Cómo hallar el cateto de un triángulo rectángulo

Para hallar un cateto se utilizan las siguientes fórmulas:

$c^2 - b^2 = a^2$

$c^2 - a^2 = b^2$

A la hipotenusa al cuadrado menos cateto al cuadrado, se le saca la raíz cuadrada y la raíz es el cateto que se buscaba.

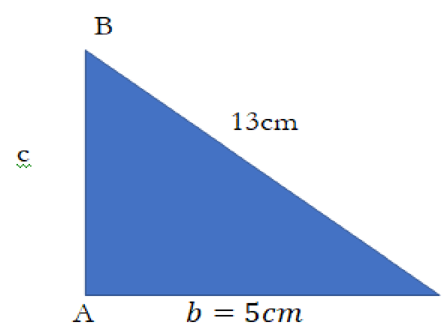
Ejemplo 3

Si se tiene un triángulo rectángulo con una hipotenusa que mide 13cm y uno de sus lados mide 5cm. Compruebe el Teorema de Pitágoras.

Datos

$a = 13cm$ que es la hipotensa

$b = 5cm$ que es uno de los lados o cateto



Solución

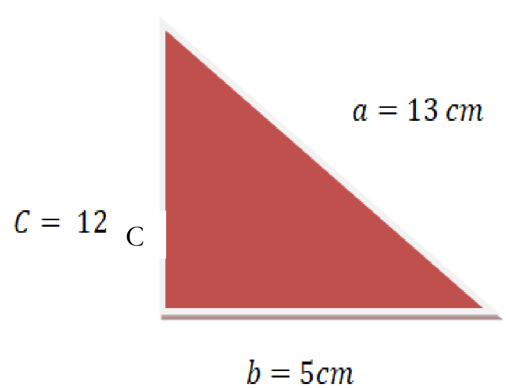
$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$c = \sqrt{(13cm)^{2-}(5cm)^2}$$

$$c = \sqrt{169cm^2 - 25cm^2}$$

$$c = \sqrt{144cm^2}$$

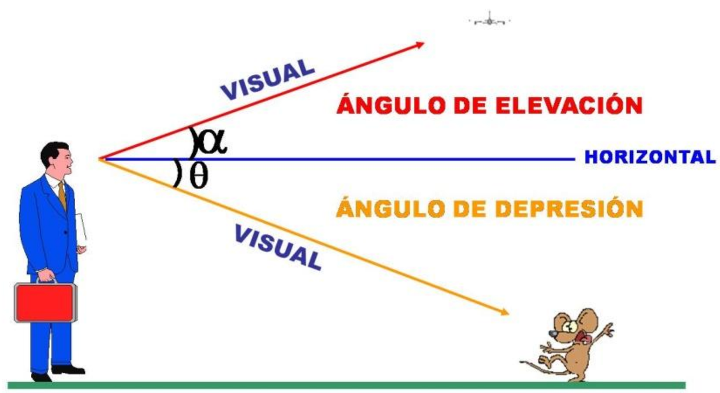
$$c = 12cm$$



c A B

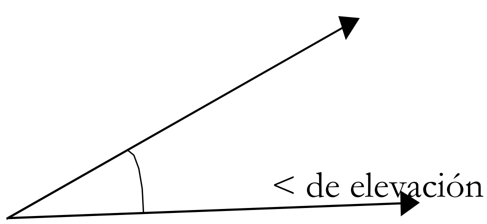
Ángulos verticales

Los ángulos verticales son ángulos agudos contenidos en un plano vertical y formado por dos líneas imaginarias llamadas horizontal y visual.



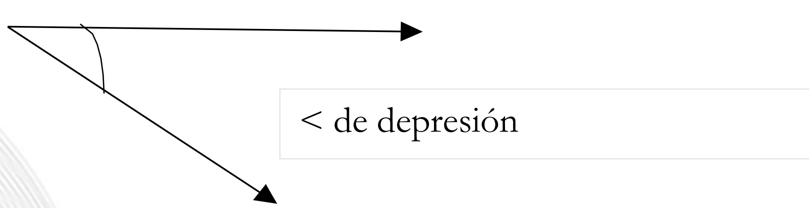
6.3 Angulo de elevación

Es el ángulo que una visual forma con una línea horizontal, estando el objetivo de dicha visual por encima de la horizontal.



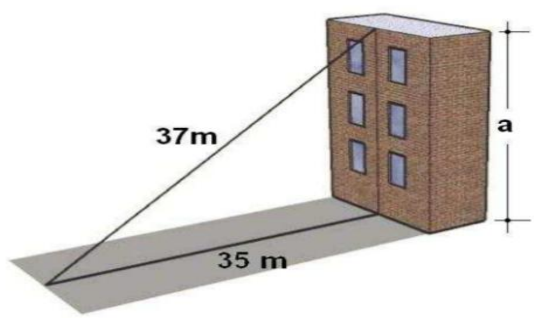
6.4 Ángulo de depresión

Si el objeto de la visual está por debajo de la horizontal.



6.5 Ejemplo del teorema de Pitágoras

Problema No.1



Alejandro observa desde la cúspide de un edificio que se formó una sombra que mide 35m; desciende hasta el extremo de esta, recorriendo una distancia de 37m.

¿A qué altura se encontraba?

Datos:

a= es la altura del edificio, por calcular.

b= 35m, que es la línea horizontal o cateto adyacente al ángulo

c= 37m que es la mayor longitud o hipotenusa

Solución: Como ya se conoce la hipotenusa que es la longitud de mayor tamaño y se sabe también el cateto adyacente, que es la línea horizontal, entonces falta saber la altura que es el cateto opuesto al ángulo formado.$c^2 = a^2 + b^2$ y su fórmula acabada

$$a = \sqrt{c^2 - b^2}$$

$$a = \sqrt{c^2 - b^2}$$

$$a = \sqrt{(37m)^2 - (35m)^2}$$

$$a = \sqrt{1369m^2 - 1225m^2}$$

$$a = \sqrt{144m^2}$$

$$a = 12 \text{ m}$$

A 12 metros de altura

Problema No. 2

Se quiere apoyar una escalera en la cúspide de una pared de 15m hasta un punto situado a 20.5m, ¿Cuánto debe medir la escalera?

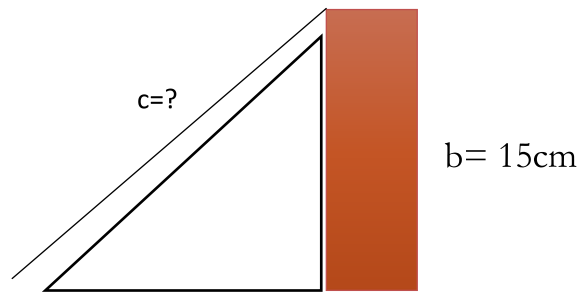
Se toman los datos ofrecidos y se construye una gráfica que represente el problema.

Datos

a= 20.5 metros, donde **a** es la distancia horizontal.

b = 15 metros, donde **b** es la altura del edificio.

c = es la longitud de la escalera por obtener.



Solución

Se toman los datos ofrecidos y se elabora una gráfica que represente el problema

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c^2 = (20.5m)^2 + (15m)^2$$

$$c^2 = 420.25m^2 + 225\ m^2$$

Luego se quita la potencialización con la operación inversa que es la radicación:

$$\sqrt{c^2} = \sqrt{645.25\ m^2}$$

$$c = \sqrt{645.25\ m^2}$$

$$c = 25.4\ m$$

La escalera mide 25.4 metros

Problema No. 3

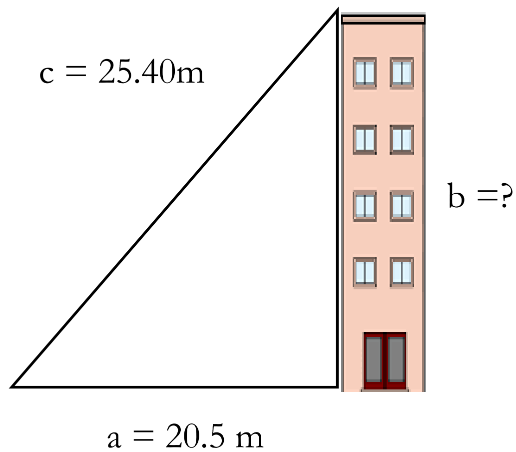
En una casa se colocó una escalera de 25.4 metros de largo a una distancia horizontal de 20.5 metros, se desea saber ¿Cuál es la altura de dicha casa?

Se toman los datos ofrecidos y se construye una gráfica que represente el problema.

Datos

a = 20.5 metros

b =?



$$b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

$$b = \sqrt{(25.4m)^2 - (20.5m)^2}$$

$$b = \sqrt{645.16m^2 - 420.25m^2}$$

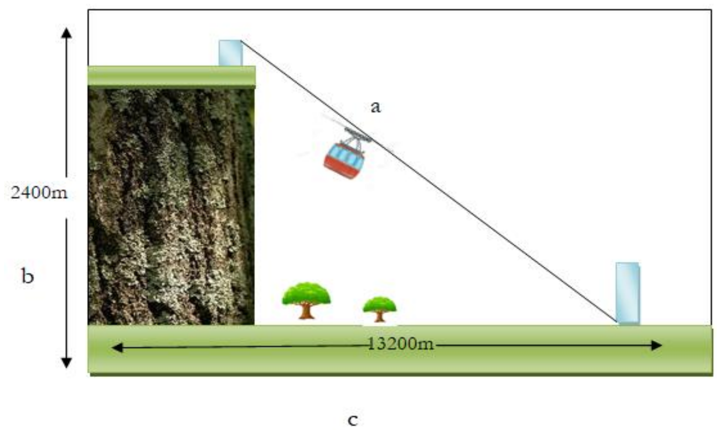
$$b = \sqrt{224.91m^2}$$

$$b = 15\ m$$

La altura de la casa es 15 metros

Problema No. 4

Un teleférico sube desde un valle hasta la cima de una montaña, ascendiendo a una altura de 2400 metros. Si el punto de partida está a la distancia de 3200 metros del punto que, dentro de la montaña, está justo debajo de la cima. ¿Cuánto mide el cable del teleférico?



Para resolver este problema se trabaja con el teorema de Pitágoras

Datos

$b = 2{,}400\ m$

$c = 3{,}200\ m$

$a = ?$

Solución

$$a = \sqrt{b^2 + c^2}$$

$$a = \sqrt{(2400m)^2 + (3200m)^2}$$

$$a = \sqrt{5{,}760{,}000m^2 + 10{,}240{,}000m^2}$$

$$a = \sqrt{16{,}000{,}000m^2}$$

$$a = 4000m$$

El cable del teleférico mide $4000\ metros$

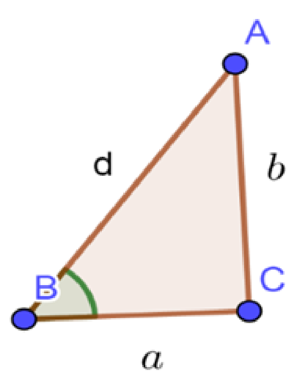
6.6 Funciones o Razones Trigonométricas

Las funciones o razones trigonométricas de un ángulo son las obtenidas entre los tres lados de un triángulo rectángulo. Es decir, las comparaciones por su cociente de sus tres lados a, b yc.

Definiciones de las funciones trigonométricas

Existen seis funciones trigonométricas que son: seno, coseno, tangente y las demás son inversas.

6.6.1 Seno

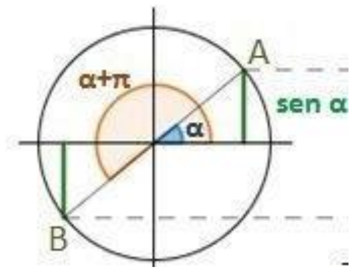


El **seno** de un **ángulo ∝** se define como la **razón** entre el cateto opuesto(a) y la hipotenusa(c).

$$sen\ \propto = \frac{cat.opuesto}{hipotenusa} = \frac{c}{a}$$

Sus abreviaturas son **sen** o **sin** (del latín sinus).

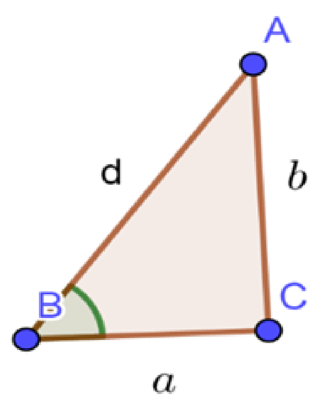
La **gráfica** de la función seno es:



6.6.2 Coseno

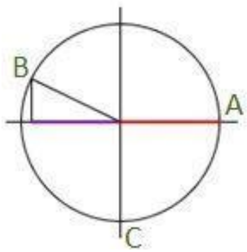
El **coseno** de un **ángulo ∝** se define como la **razón** entre el cateto contiguo o cateto adyacente (b) y la hipotenusa(c).

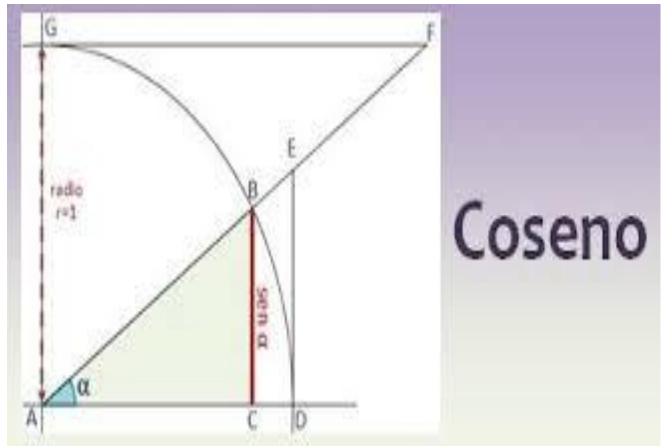
$$csc \propto = \frac{cat.contiguo}{hipotenusa} = \frac{b}{c}$$



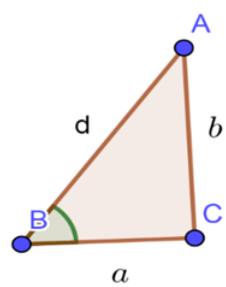
Su abreviatura es **cos** (del latín cosinus).

La **gráfica** de la función coseno es:





6.6.3 Tangente

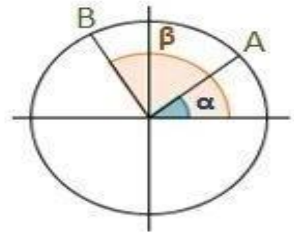


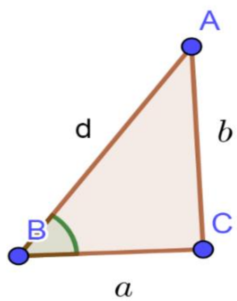
La **tangente** de un **ángulo ∝** es la **razón** entre el cateto opuesto(a) y el cateto contiguo o cateto adyacente (b).

$$\tan \propto = \frac{cat.\ opuesto}{cat. contiguo} = \frac{a}{b}$$

Sus abreviaturas son **tan** o **tg**.

La **gráfica** de la función tangente





b = cateto Opuesto del ángulo B

a = cateto adyacente del ángulo B

d = hipotenusa

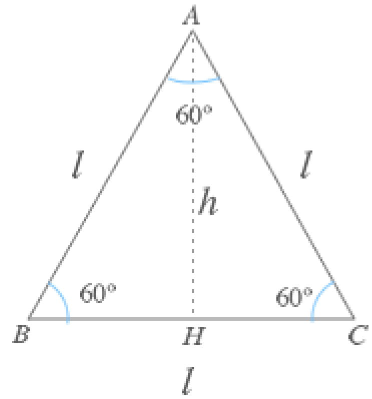
$$\text{sen}\theta\text{B}\,\frac{\text{b}}{\text{d}} = \frac{\text{Cat .opuesto}}{\text{Hipotenusa}}$$

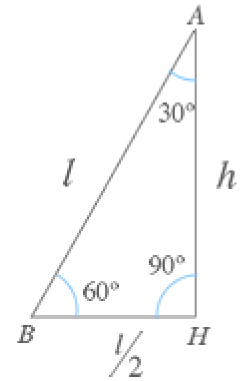
$$\frac{at.Adyacente}{Hipotenusa}$$

$$\frac{Cat.\ Opuesto}{at.Adyacente}$$

$$\frac{at.\ Adyacente}{Cat.\ Opuesto}$$

6.7 Ángulos notables





Los ángulos notables son aquellos ángulos cuyos valores son específicos y que aparecen con determinada frecuencia en la vida cotidiana.

Los ángulos notables son 30^0,45^0 y 60^0

Estos ángulos se originan seleccionando un triángulo equilátero, ya que tiene sus lados y ángulos iguales, así se obtendrá un ángulo de 60^0.

Funciones trigonométricas de 30^0,45^0 y 60^0

	Ángulos				
Razones	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0
sen α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
Tanα	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞

Como resolver ángulos notables 30^0

Se va a trabajar con estos tres triángulos, el primer triangulo se va a trabajar con un ángulo de $37^o - 53^o$ y lado 3,4 y 5.

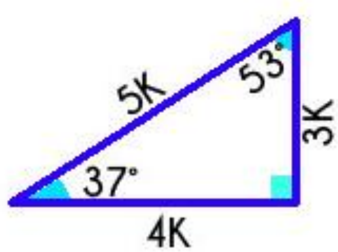
Se debe tener presente que, a mayor ángulo, mayor lado, el triángulo tiene 3 ángulos el de 37^o y su complementario que es 53^o que los sumandos suman 90^o.

Este es (3,4 y 5) menor ángulo que es el de 37^o se le pone el 3k al ángulo 53 se le pone el lado intermedio que es $4k$ y el ángulo más grande se le pone el lado más grande que es la hipotenusa.

Se nos pide calcular el seno de 37^o que es el cateto opuesto sobre la hipotenusa. En este caso el cateto opuesto $3k$ y la hipotenusa es el 5 el seno de $37^o = \frac{3k}{5k}$ se simplifica la K y nos queda $\frac{3}{5}$.

Ejemplo

$\Delta 37^o - 53^o(1,4,5)$



$$\operatorname{sen} 37^o = \frac{3k}{5k}$$

$$\operatorname{sen} 37^o = \frac{3}{5}$$

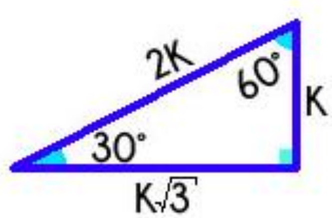
Ángulos notables de 30^0 y 60^0

El segundo triángulo va a trabajar con dos ángulos 30^0 y 60^0 y un ángulo recto que mide 90^0 a este triangulo rectángulo se les conoce los lados$(1{,}2)$, como se va a trabajar con un ángulo de 30^0 al opuesto de este ángulo se le pone $2k$ para saber que le corresponde al otro lado **cateto adyacente** se aplica el teorema de Pitágoras y se obtiene $k\sqrt{3}$.

Ahora se va a trabajar con $\cos 60^0$ que tiene como función cateto adyacente sobre hipotenusa, él cateto adyacente es k ya la hipotenusa es $2k$, como se tiene $\cos 60^o$ es igual $1k$ sobre $2k$ se simplifica la k y coseno de 60^0 es igual a $\frac{1}{2}$

Ejemplo

$\Delta 30^o - 60^o(1{,}2)$



$$\cos 60^o \; = \frac{1k}{2k}$$

$$\cos 60^o \; = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$$

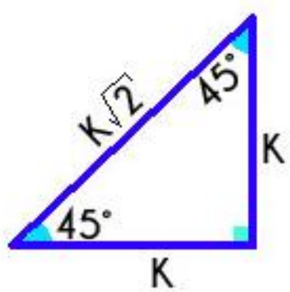
Ángulos notables de 45^0

3-El tercer triangulo se va a trabajar con el ángulo de 45^0 y su complementario es 45^0 sumado suman 90^0 a este triangulo se le conocen los lados $(1{,}1)$. Este triángulo tiene como cateto $1k$ en ambos catetos y para encontrar la hipotenusa se aplicará el teorema de Pitágoras se obtendrá $k\sqrt{2}$, en este caso se trabajará con la tangente que tiene como función cateto opuesto sobre cateto adyacente.

Tangente de 45^0 que se puede trabajar con cualquiera de los dos ángulos de 45^0 la tangente tiene como cateto opuesto $1k$, cateto adyacente $1k$ y se simplifica la k y nos queda $\frac{1}{1}$ que es igual a la tangente de 45^0 y queda como resultado $\tan 45^0 = 1$.

Ejemplo

$\Delta 45^o - 45^o(1,1)$



$\tan 45^o = \frac{1k}{1k}$

$$\tan 45^o = \frac{1}{1}$$

6.8 Ángulos cuadrantales

Son aquellos ángulos que tienen sus lados terminales en algunos de los cuatros cuadrantes de nuestro plano cartesiano, partiendo de esto se hace sumamente necesario e hiperactivo el conocimiento de que ellos son ángulos de 0^0,90^0,$180^0, 270^0$y se utilizan muchas en diversas operaciones en el área de la trigonometría, por lo cual se debe conocer cuál es el valor de las seis principales funciones.

Funciones trigonométricas de los ángulos cuadrantales

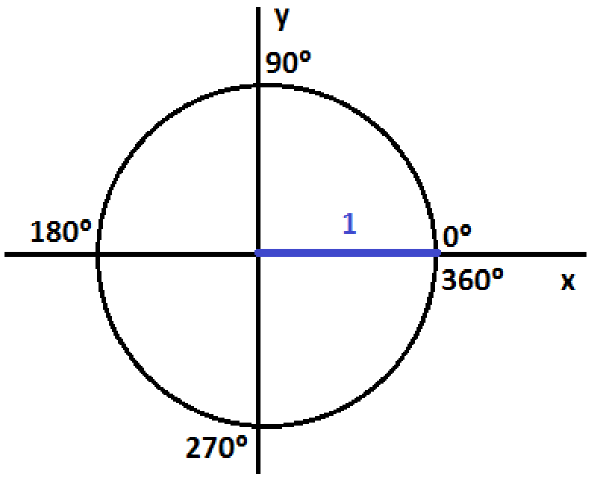
Ángulos / Razones	0^0	90^0	180^0	270^0	360^0
Seno	0	1	0	-1	0
Coseno	1	0	-1	0	1
tangente	0	∞	0	$-\infty$	0
Cotangente	∞	0	$-\infty$	0	∞
Secante	1	∞	-1	∞	1
Cosecante	∞	1	1	-1	∞

Como resolver ángulos cuadrantales

Funciones trigonométricas de 0^0

En este caso en la medida en que el ángulo tiende a cero la hipotenusa **d tiende a** coincidir con la a abscisa **a**$(\boldsymbol{d} = \boldsymbol{a})$y la ordenada **b** tiende a cero $(b = o)$.

Ejemplo:



$$\operatorname{sen} 0^0 = \frac{b}{d} = \frac{0}{d} = 0$$

$$\operatorname{Cos} 0^0 = \frac{a}{d} = 1$$

$$\tan 0^0 = \frac{b}{a} = \frac{0}{a} = 0$$

$$\cot 0^0 = \frac{a}{b} = \frac{a}{o} = \infty$$

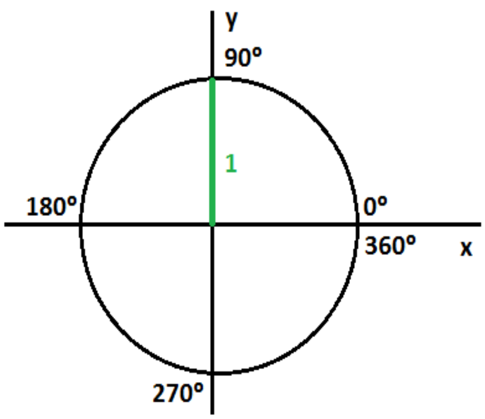
$$\sec 0^0 = \frac{a}{d} = 1$$

$$\csc 0^0 = \frac{d}{b} = \frac{d}{0} \infty$$

Funciones trigonométricas de90^0

En este caso la medida de a tiende a 90^0 , la hipotenusa d tiende a coincidir con la ordenada b $(d = b)$ y la abscisa tiende a cero $(a = 0)$.

Ejemplo



$$\operatorname{sen} 90^0 = \frac{b}{d} = 1$$

$$\cos 90^0 = \frac{a}{d} = \frac{0}{d} = 0$$

$$tan 90^0 = \frac{b}{a} = \frac{b}{0} = \infty$$

$$\cot 90^0 = \frac{a}{b} = \frac{a}{b} = 0$$

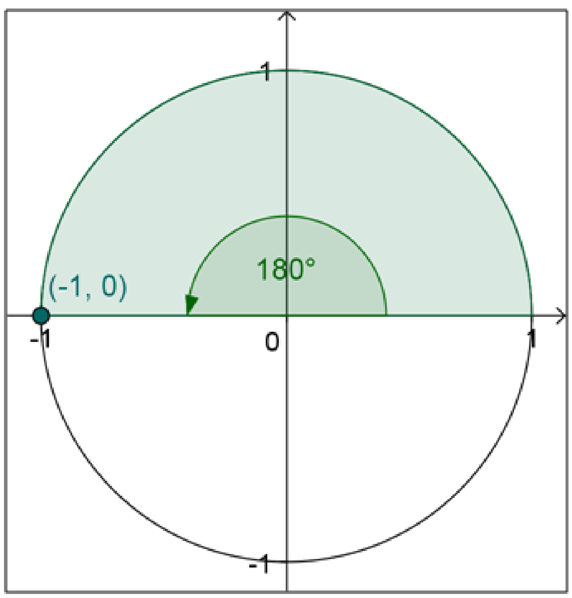
$$\sec 90^0 = \frac{d}{a} = \frac{d}{0} = \infty$$

$$\csc 90^0 = \frac{d}{b} 1$$

Funciones trigonométricas de 180^0

En este caso en la medida en que a tiende a 180^0 la hipotenusa d tiende a la abscisa en valor absoluto $d = |a|$ y la ordenada b a cero $(b = 0)$.

Ejemplo



$$\operatorname{sen} 180^0 = \frac{b}{d} = \frac{0}{d} = 0$$

$$\cos 180^0 = -\frac{a}{d} = -1$$

$$\tan 180^0 = \frac{b}{-a} = \frac{0}{-a} = 0$$

$$\cot 180^0 = \frac{-a}{b} = -\frac{a}{0} = -\infty$$

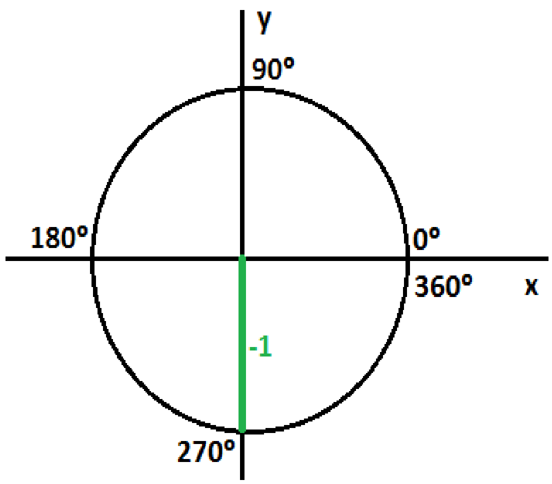
$$\sec 180^0 = \frac{d}{-a} = -1$$

$$\csc 180^0 = \frac{d}{b} = \frac{d}{0} = \infty$$

Funciones trigonométricas de 270^0

En este caso en la medida en que a tiende a 270^0 la hipotenusa d tiende a la ordenada en valor absoluto $(d = |b|)$ y la abscisa a tiende a cero $(a = 0)$.

Ejemplo



$$\text{sen}\, 270^o = \frac{-b}{d} = 1$$

$$cos\ 270^0 = \frac{-a}{d} = \frac{0}{d} = 0$$

$$\tan 270^0 = \frac{-b}{a} = \frac{b}{0}\infty$$

$$\cot 270^0 = \frac{-a}{-b} = \frac{a}{-b} = 0$$

$$\sec 270^0 = \frac{d}{a} = \frac{d}{0} = \infty$$

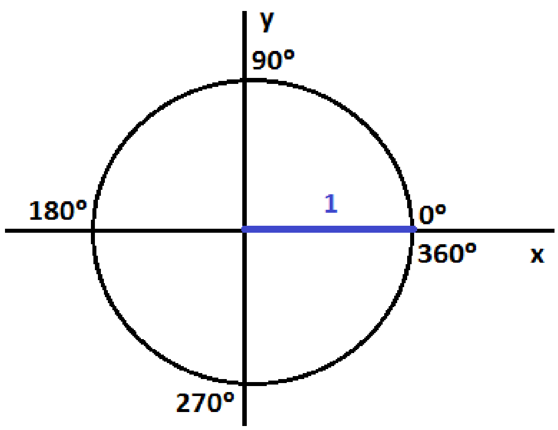
$$\csc 270^0 = \frac{d}{-b} = 1$$

Funciones trigonométricas de 360^0

Las funciones de un ángulo de 360^0 son iguales a las funciones de un ángulo de cero grados.

En este caso el ángulo de 360^0 coincide con 0^0, por consiguiente, las funciones trigonométricas coinciden. $d = a$ y $b = 0$

Ejemplo



$$\operatorname{sen} 360^0 = \frac{b}{d} = \frac{0}{d} = 0$$

$$\cos 360^0 = \frac{a}{d} = 0$$

$$\tan 360^0 = \frac{b}{a} = \frac{0}{a} = 0$$

$$\cot 360^0 = \frac{a}{b} = \frac{a}{0} \infty$$

$$\sec 360^0 = \frac{d}{a} = 1$$

$$\csc 360^0 = \frac{d}{b} = \frac{d}{0} = \infty$$

Obtención de los valores de las

funciones trigonométricas utilizando calculadora electrónica.

Obtener los valores de.

Para obtener estos valores en la calculadora procedemos así:

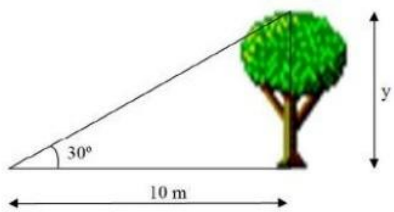
1. Se pone la calculadora en grado (DEG)
2. En el teclado se observan las funciones de seno (sin), coseno (cos) y tangente (tan)
3. Basta con introducir el número de grado del ángulo considerado y presionar la tecla de la función correspondiente.

Funciones	Ángulos					
	30^o	45^o	60^o	80^o	315^o	330^o
Sen	0.5	0.707	0.866	0.984	-0.707	-0.5
Cos	0.866	0.7071	0.5	0.173	0.707	0.866
Tan	0.577	1	1.732	5.671	-1	-0.577

6.9 Ejemplos de razones trigonométricas

Problema No.1

Se desea saber la altura en metros de un árbol, el cual forma con el pie del árbol y la distancia un ángulo de 30^o, a una distancia horizontal de 10 metros.



Como se puede observar en la figura, la altura del árbol es el cateto opuesto al ángulo y la distancia horizontal es el cateto adyacente. Como se está buscando la altura del árbol, en este caso es el cateto opuesto. Como el problema nos brinda los datos del cateto adyacente al ángulo y relaciona ambos catetos, se utiliza la función de la tangente.

Se plantea el problema a realizar

$$tan\ 30^o = \frac{cat.opuesto}{cat.adyacente}$$

Utilizando la calculadora, se obtiene el valor de la $\tan 30^o$

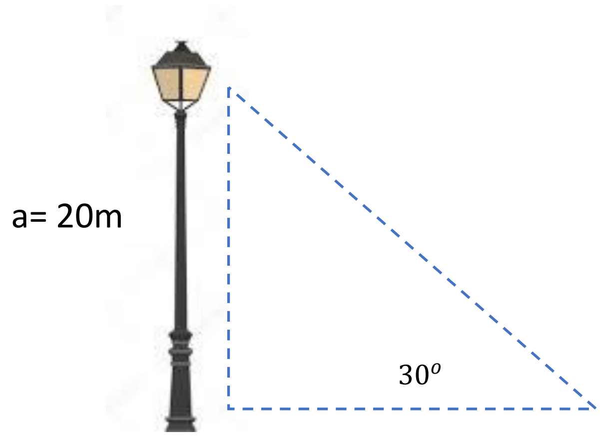
$$tan30^o * 10m = cat.opuesto$$

$$tan30^o = 0.57735 * 10 = 5.77m$$

La altura del árbol es $\boldsymbol{5.77\ metros}$

Problema No.2

Se desea sujetar un poste de 20m de altura con un cable que parte de la parte superior del mismo hasta el suelo de modo que forme un ángulo de 30^0. Calcula el precio del cable si cada metro cuesta RD$ 12.



Como se conoce el lado opuesto $a = 20m$, se utiliza el seno para calcular la hipotenusa del triángulo.

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{a}{h}$$

$$h = \frac{a}{\operatorname{sen}\theta}$$

$$h = \frac{a}{\operatorname{sen}30^o}$$

Se sustituye el ángulo y el lado.

$$h = \frac{20m}{0.5}$$

$$h = 40m$$

El cable mide $\boldsymbol{40\ m}$ y su precio es de $\boldsymbol{RD\$\ 480}$

RESUMEN DE LA UNIDAD VI

Definición de Teorema: Es una proposición que puede ser demostrada.

Teorema de Pitágoras:

El teorema de Pitágoras establece que, en todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las respectivas longitudes de los catetos.

Ángulos verticales: Los ángulos verticales son ángulos agudos contenidos en un plano vertical y formado por dos líneas imaginarias llamadas horizontal y visual.

Angulo de elevación: Es el ángulo que una visual forma con una línea horizontal, estando el objetivo de dicha visual por encima de la horizontal.

Ángulo de depresión: Si el objeto de la visual está por debajo de la horizontal.

Funciones o Razones Trigonométricas: Las funciones o razones trigonométricas de un ángulo son las obtenidas entre los tres lados de un triángulo rectángulo.

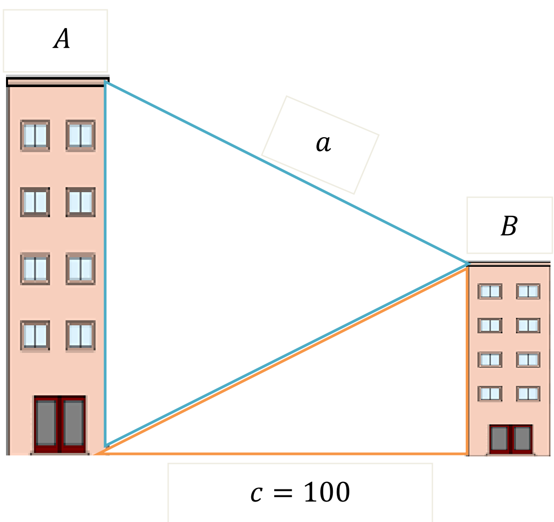
Ángulos notables: Los ángulos notables son aquellos ángulos cuyos valores son específicos y que aparecen con determinada frecuencia en la vida cotidiana.

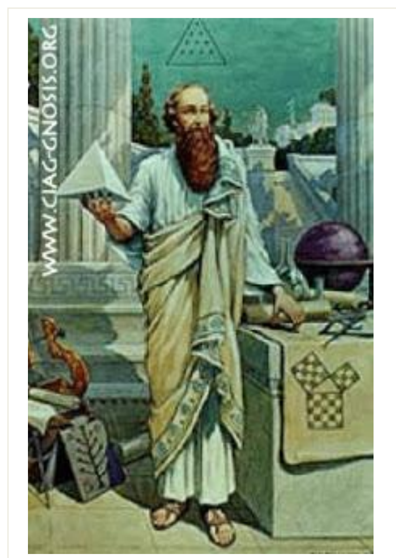
Ángulos cuadrantales: Son aquellos ángulos que tienen sus lados terminales en algunos de los cuatro cuadrantes del plano cartesiano. Estos son 0^0,90^0,$180^0, 270^0\ y\ 360^o$.

ACTIVIDADES DE LA

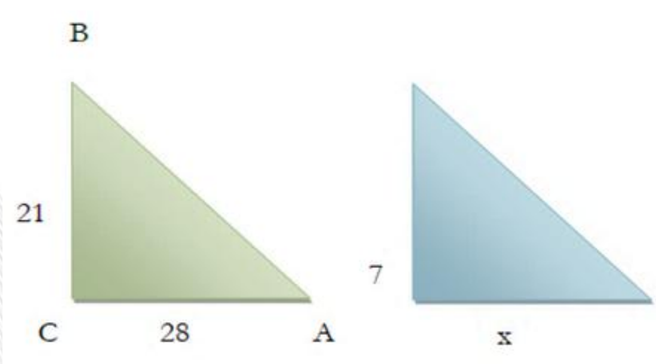
UNIDAD VI

Pedro desea calcular la altura de dos edificios que están situados a 100 metros uno del otro como tiene acceso al edificio más alto observa que desde la azotea de dicho edificio se avista la azotea del otro bajo un ángulo de 73.3 grados, desde la base del mismo edificio se ve la azotea del otro edificio bajo un ángulo de 19.29 grados **¿puede Pedro calcular la altura de los edificios con los tres datos con los que cuenta?**

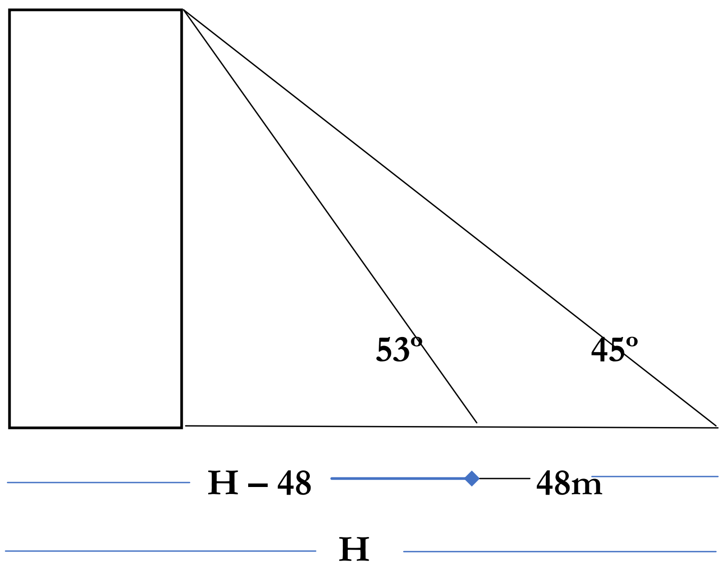




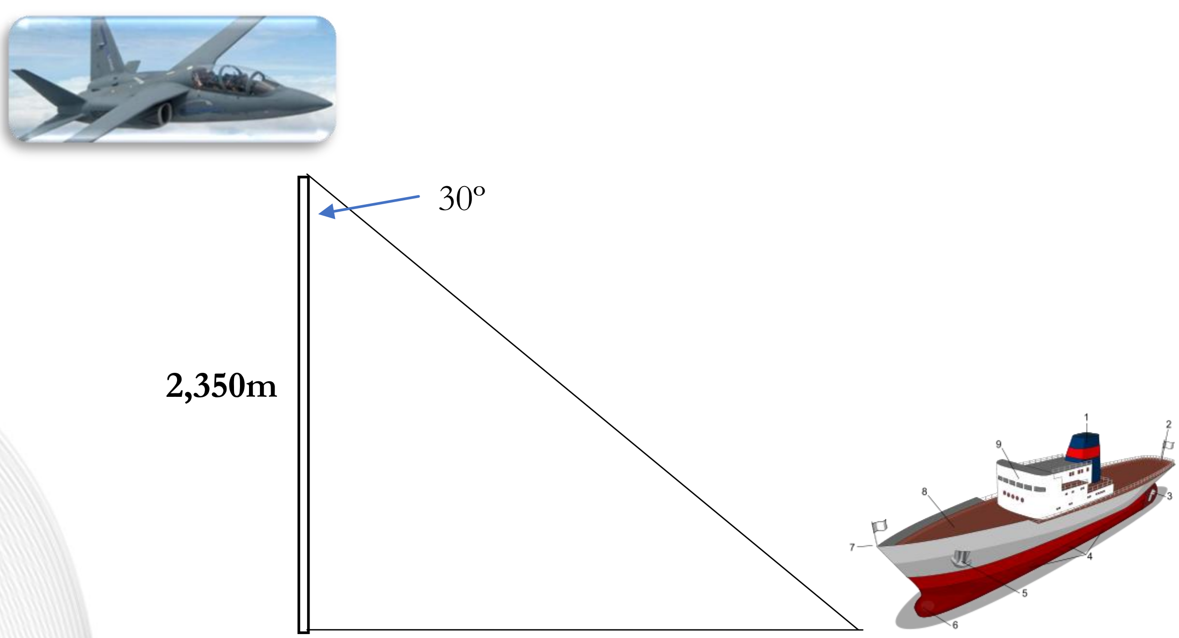
Determina el lado que falta en cada caso.



Una persona observa la parte más alta de un edificio con un ángulo de elevación de 45^0, acercándose $48m$, el nuevo ángulo de elevación es de 53^0. Halla la altura del edificio.

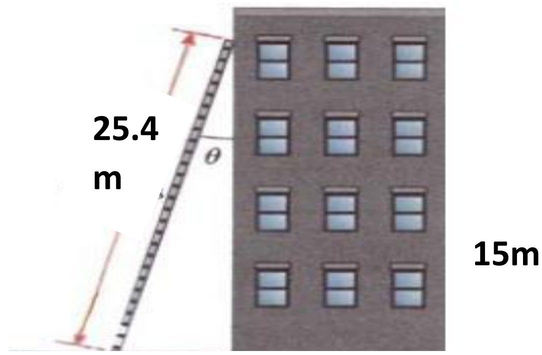


Un avión de reconocimiento localiza un barco enemigo con un ángulo de depresión de 30^0, si el avión vuela a $2350m$ de altura, calcular la distancia a la que se encuentra el barco enemigo.



Ejercicios de autoevaluación

1. En un edificio de 15 metros de altura se colocó una escalera que mide 25.40 metros, se desea saber la distancia horizontal a la que fue colocada.



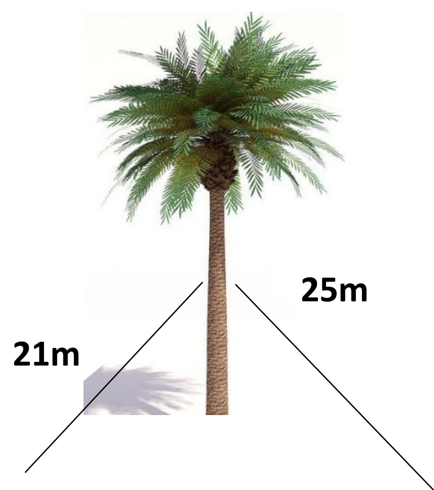
a) $18.3m$

b)$20.3m$

c)$20.5m$

d)$19.4m$

2. Una palmera de 17 metros de altura se encuentra sujetada por dos cables de $21m$ y $25m$ respetivamente. Calcular la distancia que hay de A hacia B.



a)$28.33m$

b)$30m$

c)$25.66m$

d)$30.66m$

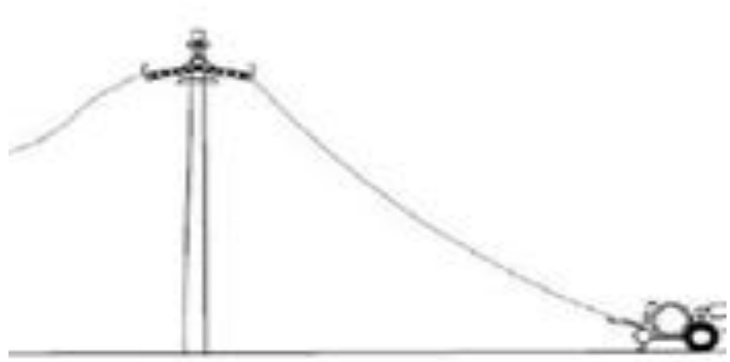
3. Un poste de luz tiene un cable de jalón que sube del suelo hasta la cima del poste de luz, ascendiendo a una altura de $50m$. Si el punto de partida está a la distancia de $45m$. ¿Cuántos mide el cable del jalón del poste de luz?

a)$67.26m$

b)$67.26m$

c)$60.3m$

d)$65.26m$



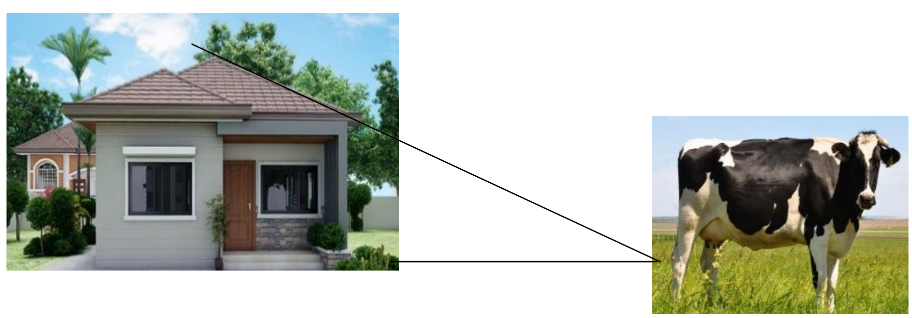
4- De la cima de una casa de $7m$ observa una vaca con un ángulo de depresión de 12^0. La distancia entre la vaca y el pie de la casa es:

a)$27.33m$

b)$32.93m$

c)$30.93m$

d)$-32.93m$



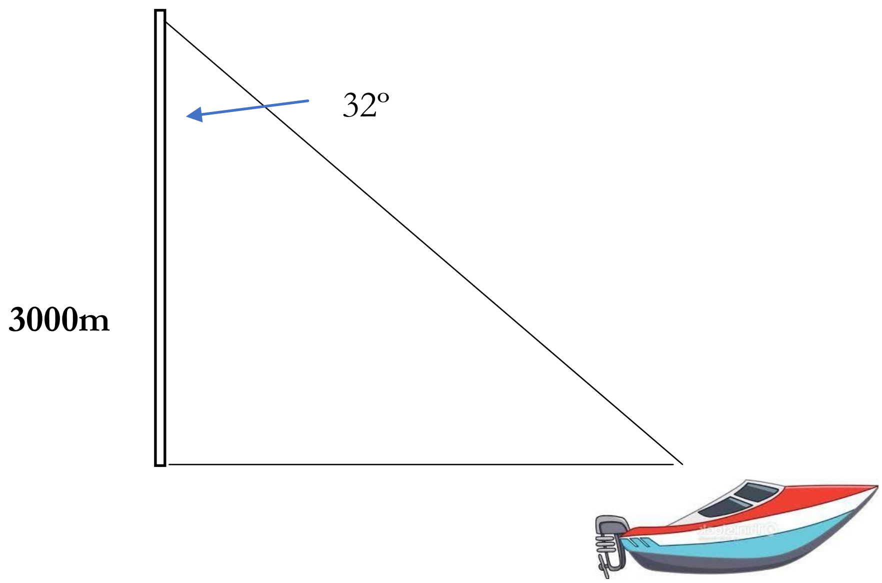
5- **Un avión costero localiza una yola traficando humanos con un ángulo de depresión de 32^0 si el avión vuela a $3000m$ de altura. La distancia a la que se encuentra la yola es:**

a)$4.661m$

b)$3.53m$

c)$5.661m$

d)$-5.661m$



6- **Un grupo de estudiantes de la ciudad de San Francisco de Macorís va de excursión al pico Duarte. Si a partir de un punto A, recorren una distancia de 1500m, sobre un tramo que tiene una inclinación de 30^0 con relación a la horizontal. La altura a la que se encuentra el punto A al final de recorrer los 1500m es:**

a)$750m$

b)$700m$

c)$625m$

d)$745m$

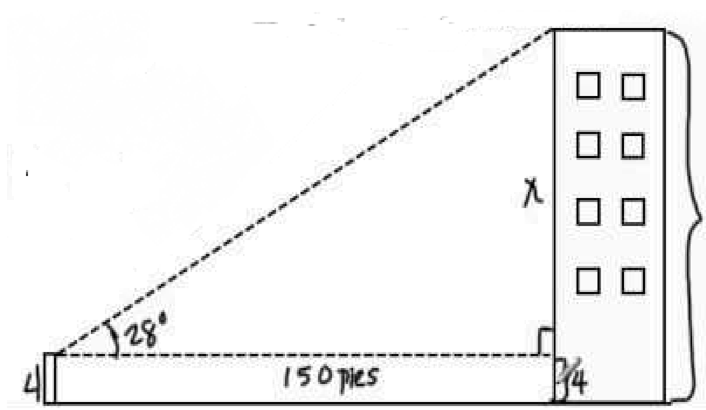
7- **Un topógrafo, utilizando un poste de observación de $4pies$ de altura, colocado a $150pies$ del edificio, observa el tope de un edificio con un ángulo de elevación de 28^0. La altura del edificio es:**

a)$86.76pies$

b)$-86.76pies$

c)$75.76pies$

d)$82.73pies$



BIBLIOGRAFÍA DE LA UNIDAD VI

1. (Anónimo) (s.f) Funciones trigonométricas. Extraída desde https://es.slideshare.net/memolibre/ngulos-verticalesFecha de acceso 11/11/2019.
2. Baldor, A. (2000). Precálculo: Algebra, Geometría analítica y Trigonometría. Editorial Limusa. México.
3. Gómez. N. (2016). Matemática en la Educación primaria II República Dominicana Pág. 264, 265.
4. Juárez, J. (2009) Matemática III pág. 189
5. Pérez, V. (2010). La guía (matemática) la historia general de la trigonometría. Extraído desde https://matemática.laguia2000.com/general/historia-de-la-trigonometria. Fecha de acceso 12/11/2019
6. Parraguez, J. y Parraguez O. (s.f.) Los ángulos verticales. Extraído desde https://es.slideshare.net/memolibre/ngulos-verticalesFecha de acceso 11/11/2019.
7. Peña, R. (2004) Matemática Básica Superior. pág. 115, 116.
8. Peña, R. (2017) Matemática Educación Básica Grado 7 pág. 128.
9. Santana, J y Gutiérrez A R. D(2006) Matemática para la Educacion media Pág. 126.

UNIDAD VII

PROBLEMAS DE ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD

Autores:

Marlín Ventura

Rosa Idalia Tavares

Martín Salvador Hiciano

ORIENTACIONES PARA EL ESTUDIO DE LA UNIDAD VII

La teoría de probabilidades se ocupa de asignar un cierto número, a cada posible resultado que pueda ocurrir en un experimento aleatorio, con el fin de cuantificar dichos resultados y saber si un suceso es más probable que otro.

En esta unidad se trabajan contenidos relacionados con la estadística y la probabilidad, en donde se darán a conocer las teorías básicas y se presentan una serie de problemas para a través de su resolución, ayudar al desarrollo del pensamiento lógico, creativo y crítico.

COMPETENCIAS DE LA UNIDAD VII

Competencias de la unidad.

Analiza espacios muéstrales y los gráficos de medida de dispersión para interpretar situaciones cotidianas del diario vivir.

Representa experimentos aleatorios en diagramas de árbol y gráficos de barras para aplicarlos en sus actividades cotidianas.

Aplica los conocimientos sobre probabilidad en situaciones problemáticas del mundo real.

Clasifica las medidas de centralización para el cálculo de problemas estadístico en diferentes entornos.

Reconoce distintas formas para calcular probabilidad de eventos simples y compuestos y sus usos, para aplicarlos en su vida cotidiana y profesional.

ESQUEMA DE CONTENIDO DE LA UNIDAD VII

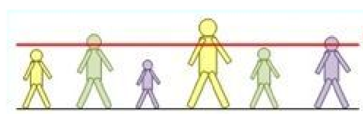
Esquema de contenidos

7.1 Estadística

La estadística es una rama de las matemáticas que se ocupa de la obtención, orden y análisis de un conjunto de datos con el fin de obtener explicaciones y predicciones sobre fenómenos observados.

7.1.1 Medidas de tendencia central para datos no agrupados

Son valores numéricos que represente la disparidad de datos de una distribución de frecuencias, son los llamados parámetros centrales ya que son intermedios que se sitúan alrededor del centro de la distribución.

7.1.2 Media aritmética 

Es la medida de tendencia central o promedio más conocidas, confiable y ampliamente usadas.

Se define como el cociente que se obtiene al dividir la suma de los valores de la variable entre el total de observaciones.

La media aritmética de un conjunto de datos se designa mediante el símbolo $\bar{x}$ (que se lee x barra)

Por definición, la $\bar{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$ donde, (x_1, x_2, x_3, …x_n) representan los valores de las variables y, **n** es igual al total de datos u observaciones.

La expresión $(x_1,\ x_{2,}x_3,\ldots,\ x_n)$ se representa matemáticamente como:$\frac{\Sigma_{i=1}^{n} x_i}{n}$

Documentación

Σ=Es la letra griega S o sigma, e indica suma total.

La expresión $i = 1$,indica el elemento que va a sumarse(i) y el primer término de la suma (1).

$n\ del\ superíndice$= Término final de la suma.

x_i= Variable o dato estadístico.

$n\ de\ la\ división$= Total de datos.

Ejemplo: Fiesta de globos

Una niña entra a una tienda y compra 35 globos de distintos colores. ¿Cuál es la media aritmética según los datos que se muestran a continuación?

Solución

Datos

$x_i = 11, 6, 7, 7, 4$

$n = 5$

$\bar{x} =?$

Fórmula

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

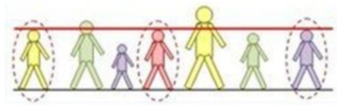
Se sustituyen los datos en la fórmula y se suman.

$$\bar{x} = \frac{11 + 6 + 7 + 7 + 4}{5}$$

$$\bar{x} = \frac{35}{5}$$

Se realiza la división $\bar{x} = 7$

En promedio la niña compro 7 globos de cada color.

7.1.3 Moda 

En la distribución de un conjunto de datos, aquel valor que más se repite se define como el valor modal; o sea que, la moda es el valor que más se repite o que ocurre con mayor frecuencia en una distribución o conjunto numérico de datos. Es el valor con más alta probabilidad de ser seleccionado de un conjunto de datos, cuando el valor es seleccionado al azar.

La moda se identifica como: Mo = moda

Cuando una distribución de datos tiene un solo valor que es el que más se repite, se le llama unimodal o monomodal. Cuando existen dos modas, se llama bimodal. Si tiene más de dos modas recibe el nombre de plurimodal. Si la distribución no tiene ningún valor es amodal.

Ejemplos:

En un supermercado la cajera curiosamente nota que hay un artículo que han comprado varios clientes. Identifica la moda de las compras que se pagaron en dicha caja del supermercado.

Cliente 1: arroz, yogurt, refresco, pan y aceite.

Cliente 2: cerveza, queso, aceitunas, refresco y avena.

Cliente 3: plátanos, refresco, huevo, jamón y pan.

Como se puede notar por simple observación, la moda de las compras que se pagaron en la caja del supermercado es el refresco, ya que es el artículo con mayor

Mo = refresco

¿Cuál es la moda en los siguientes productos?

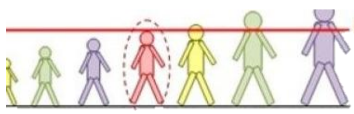
$x_i =$ 

Solución

En este caso se puede observar que existen dos modas, que son, yuca y guineo.

O sea, Mo = yuca y guineo

7.1.4 Mediana



La mediana es una medida de tendencia central que divide la distribución en dos partes iguales, de forma tal que la mitad de los datos son mayores que la mediana y la otra mitad es menor que ella.

La mediana se identifica como, Me (mediana)

$$Me = \frac{n+1}{2}$$

Documentación

$Me = mediana$

n = número total de observaciones

Para calcular la mediana cuando disponemos de un conjunto de datos no organizados en una distribución de frecuencias, debemos tener presente el siguiente procedimiento.

Organizar los valores en orden ascendente o descendente.

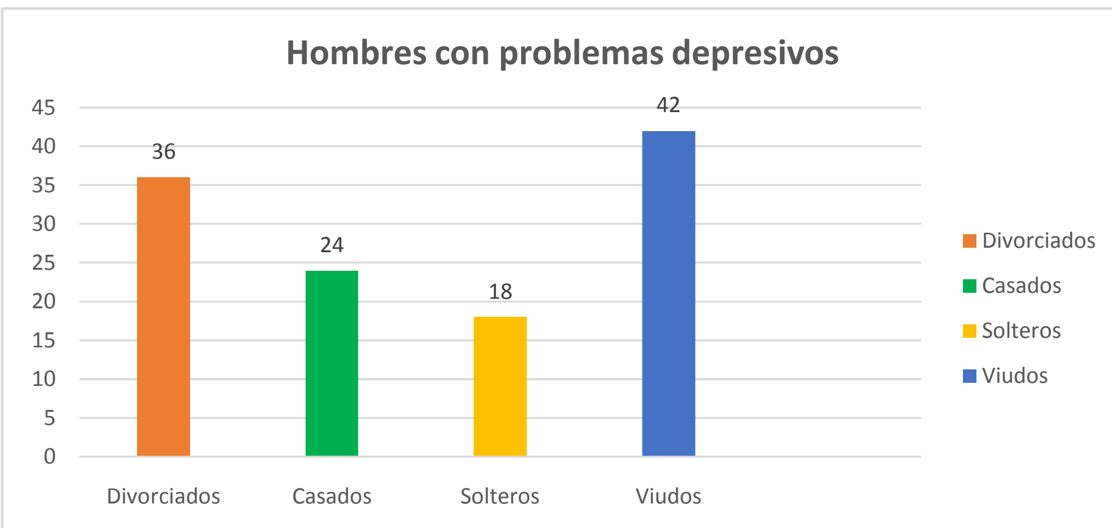
Encontrar la posición de la mediana mediante esta fórmula, $Me = \frac{n+1}{2}$

Si el número total de valores es impar, la posición de la mediana es un número entero y se encuentra de manera directa.

Si el número total de valores es par, la posición de la mediana será un número fraccionario y la mediana se encontrará mediante interpolación.

Ejemplos

Los psicólogos de un centro de salud privado de la ciudad de Santiago, observaron el estado civil de un grupo de 120 hombres que se tratan por problemas depresivos. Sus registros se presentan en el siguiente gráfico de barras. Calcule la mediana



.

$x_i = 36, 24, 18, 42$

Solución

Se organizan los datos de forma ascendente.

$x_i = 18, 24, 36, 42$

Fórmula para encontrar la posición de la mediana

$$Me = \frac{n+1}{2}$$ Se sustituye por los valores

$$Me = \frac{4+1}{2}$$ Se suma y se divide

$$Me = 2.5$$ Posición de la mediana

La posición 2.5 le corresponde al valor comprendido entre 24 y 36.

Así, la mediana, $Me = \frac{24 + 36}{2}$ se suma y se divide

$Me = 30$

Calcule la mediana de la siguiente serie de valores.

$x_i = 5, 8, 10, 7, 4, 13, 16$

Solución

Se organizan los datos en forma ascendente.

Sea, $x_i = 4, 5, 7, 8, 10, 13, 16$

Fórmula para encontrar la posición de la mediana

$Me = \frac{n + 1}{2}$ Se sustituye por los valores

$Me = \frac{7 + 1}{2}$ Se suma y se divide

$Me = 4$ Posición de la mediana

La posición 4 corresponde al valor igual a 8.

$Me = 8$

7.2 Medidas de tendencia central para datos agrupados

Cuando se toma una cantidad grande de datos, es útil agruparlos para tener un mejor orden de los mismos y así poder calcular ciertas medidas de tendencia central, se utilizan en estadística para describir comportamientos de un grupo de datos suministrados.

Ejemplo: Mes de la salud

En un gimnasio durante el mes de octubre se registraron 30 personas, su peso en libras inicial son los siguientes.

120	148	132	150	164	118	120	148	132	150
112	118	124	148	178	148	112	118	124	148
119	174	116	138	165	154	119	174	116	138

7.2.1 Pasos para construir una tabla de distribución de frecuencia de datos agrupados

Se calcula el rango de los datos, el cual se obtiene restando el mayor valor menos el menor valor de los datos.

R= valor máximo-valor mínimo.

R=178-102

R=76

Se escoge un número **«k»**, el cual es el número de clases en las que se quieran agrupar los datos. Es decir, el número de intervalos de la tabla de frecuencia. **Un intervalo de clase** es un conjunto de datos comprendidos entre dos valores considerados **límites del intervalo**. En este caso se utilizan 5 intervalos.

Para obtener la amplitud de las clases a agrupar, se procede a dividir el rango R entre «k»

$$a_i = \frac{R}{K}$$

$$a_i = \frac{76}{5}$$

$$a_i = 15.2 \approx 16$$

Se escoge el número menor de los datos, este número será el **límite inferior** $\boldsymbol{l_i}$ de la primera clase en este caso (102). A este se le suma a_i, el valor obtenido será el **límite superior** $\boldsymbol{l_s}$ de la primera clase (102+16=118).

Luego, a este valor se le suma la amplitud a_i y se obtiene el límite superior de la segunda clase 121+16=134. De esta forma se procede hasta obtener el límite superior de la última clase.

Se calculan los puntos medios o marcas de las clases.

$$x_i = \frac{limite\ inferior + limite\ superior}{2}$$

Ejemplo: **En la clase 1 de la tabla.**

Datos

Límite inferior= 102

Límite superior= 118

Solución

Se sustituye en la fórmula:

$$x_i = \frac{limite\ inferior + limite\ superior}{2}$$

$$x_i = \frac{102 + 118}{2}$$

$$x_i = \frac{220}{2}$$

$$x_i = 110$$

Esta es la marca de la clase 1

Se debe realizar el mismo procedimiento para cada una de las demás clases de la tabla.
Para calcular la frecuencia absolutaf_i se organizan los datos de menor a mayor y se cuentan la cantidad de elementos que hay correspondientes a cada intervalo de la case.

Datos:

102,112,116,117,118,118,119,120,121,124,126,130,131,132,
138,141,147,148,148,148,150,153,153,154,160,164,165,173,174,178

Solución

Case 1= 4

Clase 2= 10

Clase 3= 6

Clase 4= 7

Clase 5= 3

La frecuencia acumulada Fies la suma de las frecuencias absolutas consecutivas.

Clases	Intervalo	Frecuencia f_i	Frecuencia acumulada Fi	Límite inferior l_i	Límite superior l_s	Puntos medios x_i
Case 1	(102-118)	4	4	102	118	110
Clase 2	(118-134)	10	14	118	134	126
Clase 3	(134-150)	6	20	134	150	142
Clase 4	(150-166)	7	27	150	166	158
Clase 4	(166-182)	3	30	166	182	174

Luego de que los datos están agrupados se puede proceder a calcular la media, la mediana y la moda.

7.2.2 Moda para datos agrupados

Es el dato con mayor frecuencia absoluta. Se calcula mediante la fórmula:

$$Mo = l_i + \frac{f_i - f_{i-1}}{(f_i - f_{i-1}) + (f_i - f_{i+1})} \cdot a_i$$

Documentación:

L_i límite inferior de la clase modal.(intervalo que tiene mayor frecuencia absoluta).

f_i frecuencia absoluta de la clase modal.

f_{i-1} frecuencia absoluta inmediatamente anterior a la en clase modal. Si la moda está en el primer intervalo, entonces $f_{i-1}= 0$

f_{i+1} frecuencia absoluta inmediatamente posterior a la clase modal. Si la moda está en el último intervalo, entonces $f_{i+1}= 0$.

a_i amplitud de la clase.

Datos

L_i =118

f_i =10

f_{i-1} =4

f_{i+1} =6

a_i =16

Solución

Se sustituyen los datos en la fórmula

$$\boldsymbol{Mo = l_i + \frac{f_i - f_{i-1}}{(f_i - f_{i-1}) + (f_i - f_{i+1})} \cdot a_i}$$

$$\boldsymbol{Mo = 118 + \frac{(10-4)}{(10-4)+(10-6)} \cdot 16}$$

Se realizan las operaciones que están entre signos de agrupación. En este caso los paréntesis. Y los demás datos se quedan igual.

$$\boldsymbol{Mo = 118 + \frac{6}{(6+4)} \cdot 16}$$

Cuando hay más de una operación aritmética: suma, resta, multiplicación, y división. El orden de operaciones requiere que todas las multiplicaciones y divisiones se hagan primero, yendo de izquierda a derecha en la expresión.

$$\boldsymbol{Mo = 118 + \frac{6}{10} \cdot 16}$$

$$\boldsymbol{Mo = 118 + \frac{6}{10} \cdot \frac{16}{1}}$$

Se coloca el denominador 1 al 16 para realizar la multiplicación de fracciones.

$\boldsymbol{Mo = 118 + \frac{96}{10}}$ **Se realiza la división.**

$\boldsymbol{Mo = 118 + 9.6}$

Por último, se suma.

$\boldsymbol{Mo = 127.6 \approx 128}$

7.2.3 Mediana para datos agrupado

Es el valor del término medio que divide una distribución de datos ordenados en dos partes iguales, es decir, el 50% de los datos se ubican sobre la mediana o hacia los puntajes altos y el 50% restante hacia los puntajes bajos.

Se debe buscar el intervalo en el que se encuentre el valor obtenido al dividir la frecuencia total entre dos. $\frac{N}{2}$. Luego se calcula según la siguiente fórmula:

$$\boldsymbol{Me = L_i + \frac{\frac{N}{2} - F_{i-1}}{f_i} \cdot a_i}$$

L_i es el límite inferior de la clase donde se encuentra la mediana.

$\frac{N}{2}$ es la semisuma de las frecuencias absolutas.

F_{i-1} es la frecuencia acumulada anterior a la clase mediana.

f_i es la frecuencia absoluta del intervalo mediano.

a_i es la amplitud de los intervalos.

Datos

$L_i \quad = 134$

$N = 30$

$F_{i-1} = 14$

$f_i \quad = 6$

$a_i \quad = 16$

Solución

$$\boldsymbol{Me = L_i + \frac{\frac{N}{2} - F_{i-1}}{f_i} \cdot a_i}$$ Se sustituyen los datos en la fórmula.

$$Me = 134 + \frac{\frac{30}{2} - 14}{6} \cdot 16$$

Primero se realiza la división que está en el numerador y los demás siguen igual.

$Me = 134 + \frac{15-14}{6} \cdot 16$ Se realiza la resta del numerador.

$Me = 134 + \frac{1}{6} \cdot 16$ Se convierte en fracción para multiplicar

$Me = 134 + \frac{1}{6} \cdot \frac{16}{1}$ Se realiza la multiplicación.

$Me = 134 + \frac{16}{6}$ Se realiza la división.

$Me = 134 + 2.66$ Se suma.

$Me = 136.66 \approx 137$

7.2.4 Media aritmética para datos agrupados

Equivale al cálculo del promedio simple de un conjunto de datos.

$$\boldsymbol{Me} = \frac{x_1 f_1 \ + x_2 f_2 + x_3 f_3 + \ldots + x_n f_n}{N}$$

Documentación

x = punto medio del intervalo.

f = frecuencia absoluta del intervalo.

N= frecuencia total.

Datos:

$x_1 = 110$ $f_1 = 4$

$x_2 = 126$ $f_2 = 10$

$x_3 = 142$ $f_3 = 6$

$x_4 = 158$ $f_4 = 7$

$x_5 = 174$ $f_5 = 3$

N= 30

Solución

Se sustituyen los datos en la fórmula

$$Me = \frac{x_1 f_1 \ + x_2 f_2 + x_3 f_3 + \ldots + x_n f_n}{N}$$

$$Me = \frac{110(4)+126(10)+142(6)+158(7)+174(3)}{30}$$ Se multiplican los datos.

$$Me = \frac{440+1260+852+1106+522}{30}$$ Se suman los datos

$$\boldsymbol{Me} = \frac{4180}{30}$$ Se divide

Me=139.3

7.3 Probabilidad

Es el conjunto de posibilidades de que un evento ocurra o no en un momento y tiempo determinado. Dichos eventos pueden ser medibles a través de una escala de 0 a 1, donde el evento que no pueda ocurrir tiene una probabilidad de 0 (evento imposible) y un evento que ocurra con certeza es de 1 (evento cierto).

7.3.1 Experimento aleatorio

Un experimento aleatorio es aquel que no se puede predecir su resultado, aunque se realice varias veces en las mismas condiciones, ya que su ocurrencia depende del azar.

Cuando se realiza un experimento aleatorio, cada uno de los resultados que se pueden obtener es un suceso elemental. Al conjunto formado por todos los sucesos se le conoce como espacio muestral (E).

Ejemplos

Determina el espacio muestral en cada caso

Lanzar un dado:

E=  { }

Sacar una bola de una tómbola con los números del uno al diez:

E= {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}

Identificar el tipo de sangre de una persona:

E= {A+, A-, B+, B-, AB+, AB-, O+, O-}

7.3.2 Cálculo de la probabilidad

En el caso de que todos los sucesos elementales del espacio muestral E tengan la misma probabilidad de ocurrencia, Laplace define la probabilidad del suceso como el cociente entre el número de resultados favorables a que ocurra el suceso en el experimento y el número de resultados posibles del experimento.

$$P(A) = \frac{Casos\ favorables(x)}{Total\ de\ casos\ posibles(n)}$$

Ejemplo: Día de suerte

Marlín está en el supermercado y por la compra de mil pesos tiene la oportunidad de participar en un sorteo por medio de una ruleta. Ella debe girar la ruleta que se ve en la imagen y obtendrá el articulo donde se detenga, si se detiene en "gracias por su visita" no gana.

¿Qué probabilidad tiene Marlín de ganar un aperitivo?

Si se observa la ruleta se puede notar que está separada en 8 segmentos, de los cuales 7 tienen un premio. Si Marlín gira la ruleta, la probabilidad de que sea ganadora se consigue de la siguiente manera.

Datos	**Fórmula**
x=7	$P(A) = \frac{x}{n}$
n=8	

(x) Representa los casos favorables.

(n) Representa el total de los casos que pueden ocurrir.

Se sustituye en la fórmula por los valores correspondientes.

$$P(aperitivo) = \frac{7}{8}$$

Se realiza la división

$$P(aperitivo) = 0.875$$

Se realiza la multiplicación del decimal obtenido por 100, para conseguir el por ciento de probabilidad para Marlín.

0.875 x 100 = 87.5

$$P(A) = 87.5\%$$

Pero a Marlín le gustaría ganar el helado, ¿cuál es su probabilidad?

Como en la ruleta hay un segmento que tiene un helado, esto se convierte en un caso favorable para Marlín.

Datos	**Fórmula**
x=1	$P(A) = \frac{x}{n}$
n=8	

Se hace la sustitución en la fórmula.

$$P(helado) = \frac{1}{8} \text{Se realiza la división}$$

$$P(helado) = 0.125$$

Se multiplica el decimal por 100, para obtener el porciento.

0.125 x 100 = 12.5

Marlín, tiene un 12.5% de probabilidad de comerse un helado gratis.

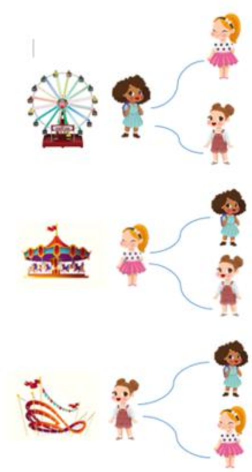
7.3.3 El Diagrama de Árbol

Es una representación gráfica de los posibles resultados de un experimento, se construye horizontalmente y se colocan ramas que indican las alternativas de dicha experimentación.

Ejemplos: Paseo al parque

María, Ana y Luisa están emocionadas de estar en la feria. Pero cada una quiere subir a un juego distinto y el asiento solo permite dos personas. María quiere subir a la estrellita, Ana a los caballitos y Luisa quiere subir a la montaña rusa. ¿Cómo pueden ellas resolver esto matemáticamente?

Solución



Para usar un diagrama de árbol, se ubica a cada una de las niñas y su opción de acompañante en las ramas.

Se puede ver que de esta manera cada una de las niñas sube a cada uno de los juegos con una amiga a la vez.

El espacio muestral será cada una de las combinaciones siguientes:

$C(3,2) = 3 \times 2 = 6$ combinaciones posibles.

Ejemplo: Visita a la abuela

Jenny va a visitar a su abuela al campo le pidió a su mama que le empacara un cambio de ropa, su madre empaco las siguientes piezas para que ella eligiera la que más le gustara: 

¿Cómo podría Jenny combinar su ropa?

Solución

Se puede usar el diagrama de árbol. Iniciando con el overol y con opciones de las blusas seguidas de los zapatos. C (1,3,2) =1×3×2=6

6 combinaciones posibles para usar las piezas de ropa.

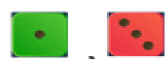
7.3.4 Probabilidad de eventos compuestos

Los eventos compuestos son dos eventos simples con los que se trabaja en conjunto; usualmente se expresan como A y B .

Ejemplo: Lanzamiento de dados

Abigail, lanzó dos dados, uno verde y otro rojo, y quería sacar un 1 y un 3, al mismo tiempo. ¿Cuál es la probabilidad de que salgan ambas fichas al mismo tiempo?

Solución

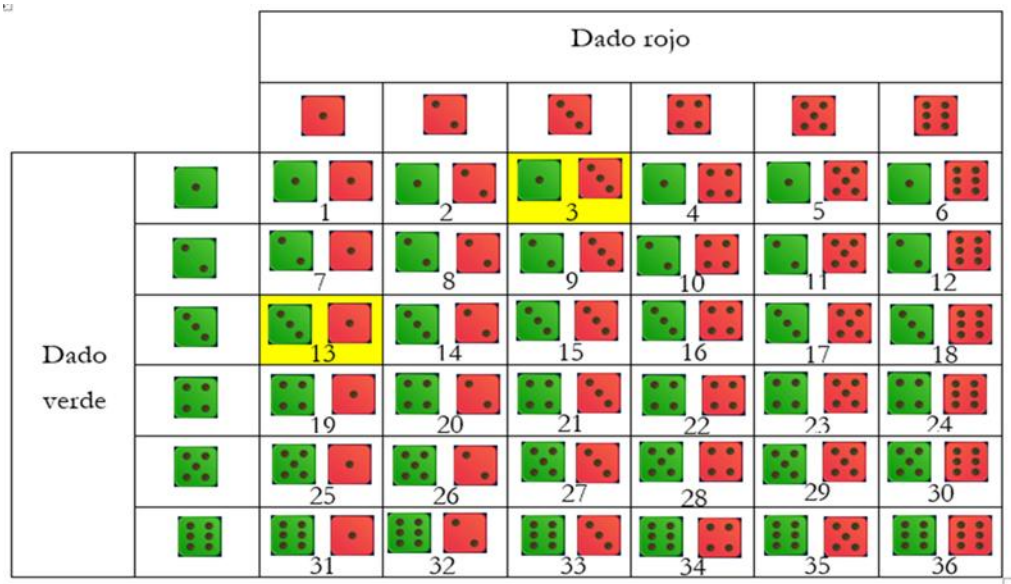
Ella tiene dos dados, uno verde y otro rojo  y quiere sacar un 1 y un 3 al mismo tiempo, cuando lance los dados.

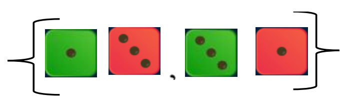
Cuando se busca la probabilidad de dos eventos simples, el espacio muestral será igual al espacio muestral del evento (A) multiplicado por el espacio muestral del evento (B). Recordando que un dado tiene 6 resultados posibles en un lanzamiento.

E()= 6 x 6

E()=36

Para buscar el espacio muestral de este experimento se utiliza una tabla de doble entrada, de tal forma que los dados rojos queden en la parte superior horizontal, y los verdes verticalmente en el lado lateral izquierdo, luego realiza las posibles combinaciones, como lo indica la tabla.



Se puede observar que todas las combinaciones posibles de los dos dados, dan como resultado 36 que son el espacio muestral para el evento de Abigail. El espacio de evento es un 1 y un 3. Observando la tabla encontrará que hay dos posibilidades. 

Para determinar la probabilidad, se utilizará la siguiente fórmula.

$$P(A) = \frac{Casos\ favorables\ (x)}{Total\ de\ casos\ posibles (n)}$$

(x) Representa los casos favorables.

(n) Representa el total de los casos que pueden ocurrir.

Datos

x=2

n=36

Fórmula

$$P(A) = \frac{x}{n}$$

Se sustituye en la fórmula por los valores correspondientes.

$P(A) = \frac{2}{36}$

Se realiza la división para obtener en decimal la probabilidad.

$P(A) = 0.056$

Se realiza la multiplicación del decimal obtenido por 100, para conseguir el por ciento de probabilidad.

0.056 x 100 = 5.6

Abigail, tiene un 5.6% de posibilidad de obtener lo que quiere.

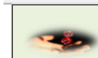
Ejemplo: Dados en la mano

Un estudiante está en el aula con dos dados en la mano y quiere saber. ¿Cuál es la probabilidad que existe que al lanzar los dados al aire el resultado sea mayor que cinco (< 5)?

Solución:

Lo primero que se debe realizar es una tabla donde se visualicen los resultados de la suma de las posibilidades que existe al lanzar dos dados.

Se puede observar en esta tabla, que al lanzar los dos dados se tienen 36 combinaciones posibles, de los cuales 26 son mayor que 5.

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Datos:

x=26

n=36

Fórmula

$$P(A) = \frac{x}{n}$$

$$\mathrm{P}(< 5) = \frac{26}{36}$$

$$\mathrm{P}(< 5) = 0.72$$

Se multiplica por 100 para convertir en porcentaje.

0.72 x 100= 72

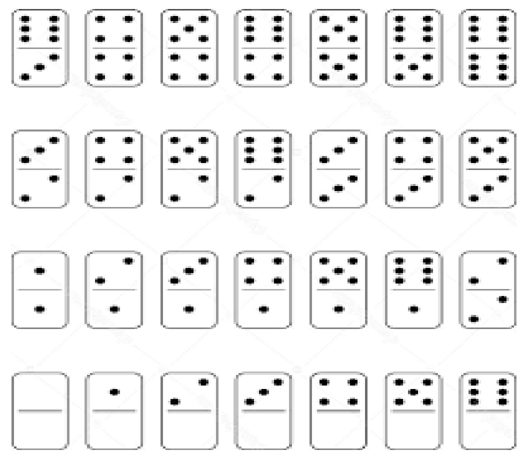
Hay 72% de probabilidad de que al lanzar los dados la suma sea mayor que 5.

Ejemplo: Juego de domino

Juan está jugando domino con sus primos y quiere que al levantar una ficha de dómino obtenga un número de puntos mayor que 9 o que sea múltiplo de 4.

Solución

Cuando se cuentan todas las fichas del dómino da como resultado que son 28 en total, como lo muestra la siguiente figura.



Estas 28 fichas del dómino son el espacio muestral, que son todos los posibles resultados del experimento.

Para calcular la probabilidad de una unión de eventos, se suma la probabilidad del conjunto A, más la probabilidad del conjunto B y se resta la probabilidad del conjunto $(A \cap B)$, porque este se repite en los dos conjuntos. Esto quedaría de la siguiente manera.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$\cup = unión$

$\cap = \ Intersección$

Para realizar la operación se utiliza la Regla de Laplace

$$P(A) = \frac{(x)}{(n)}$$

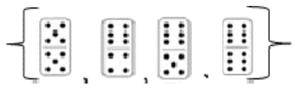
(x) Representa los casos favorables.

(n) Representa el total de los casos que pueden ocurrir.

Para el conjunto A

El conjunto formado por las fichas mayores que 9 es el siguiente:

$$Conjunto\ A(> 9) =$$



Datos

x=4

n=28

Fórmula

$$P(A) = \frac{x}{n}$$

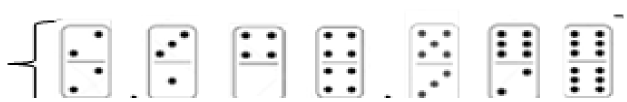
Se sustituye en la fórmula por los valores correspondientes.

$$P(A) = \frac{4}{28}$$

Para el conjunto B

Las fichas que son múltiplos de cuatro, es decir, todas las que son divisibles entre 4 y su resultado sería exacto. Ejemplo: 4,8,12,16,20.

El conjunto formado por todas las fichas que son múltiplo de 4 es el siguiente:



Datos

x=7

n=28

Fórmula

$$P(B) = \frac{x}{n}$$

Se sustituye en la fórmula por los valores correspondientes.

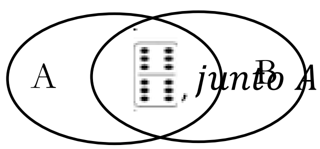
$$P(B) = \frac{7}{28}$$

Se puede observar que tanto en el conjunto A, como en el conjunto B, hay un elemento en común, que es el doble seis, a esto se les llama intersección de dos conjuntos. La **intersección de dos conjuntos A** y **B** se define como el conjunto de los elementos que están en el conjunto **A** y en el conjunto **B**.

Se denota como **A ∩ B.**

Ejemplo: Si **A = {a, b, 1, 2, 3}** y **B= {3, 4}**; se tiene que **A ∩ B = {3}, ya que es el único elemento que se repite en los dos conjuntos.**

Con la intersección del conjunto A y el B se forma un nuevo conjunto que sería:



$junto\ A \cap B =$

Datos

x=1

n=28

Fórmula

$$P(A) = \frac{x}{n}$$

Se sustituye en la fórmula por los valores correspondientes.

$$P(A \cap B) = \frac{1}{28}$$

Se realiza la operación correspondiente

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Se sustituyen los datos en la fórmula.

$$P(A \cup B) = \frac{4}{28} + \frac{7}{28} - \frac{1}{28}$$

Cuando se suman o restan fracciones con el mismo denominador, se coloca el mismo denominador y se suman o restan los numeradores.

$$P(A \cup B) = \frac{4 + 7 - 1}{28}$$

$$P(A \cup B) = \frac{10}{28}$$

Cada vez que se pueda simplificar un resultado debe hacerse tanto al numerador como al denominador.

$$P(A \cup B) = \frac{5}{14}$$

Se realiza la división para obtener en decimal la probabilidad

$$P(A \cup B) = 0.36$$

Se realiza la multiplicación del decimal obtenido por 100, para conseguir el por ciento de probabilidad.

0.36 x 100 = 36

Existe un 36% de probabilidad de que, al levantar una ficha de dómino esta sea mayor que 9 o múltiplo de 4.

RESUMEN DE LA UNIDAD VII

La estadística es una rama de las matemáticas que se ocupa de la obtención, orden y análisis de un conjunto de datos con el fin de obtener explicaciones y predicciones sobre fenómenos observados.

La media aritmética es el valor que se obtiene al sumar todos los datos y dividir el resultado entre la cantidad de datos, la moda es el dato más repetido y la mediana es el valor que ocupa la posición central cuando todos los datos están ordenados de menor a mayor.

Un experimento aleatorio es aquel que no se puede predecir su resultado, aunque se realice varias veces en las mismas condiciones ya que su ocurrencia depende del azar.

La probabilidad es la posibilidad que existe de que un hecho o condición se produzcan.

La probabilidad de un evento simple se calcula con la siguiente fórmula:

$$P(A) = \frac{Casos\ favorables(x)}{Total\ de\ casos\ posibles(n)}$$

ACTIVIDADES DE LA UNIDAD VII

Actividades

Resuelve:

Estadística.

En una olimpiada del área de Ciencia Sociales participaron 5 grupos los cuales tuvieron las siguientes puntuaciones.

8, 2, 5, 4, 6, 6, 6, 7

2, 4, 3, 2, 3, 5, 8, 7

4, 4, 4, 6, 7, 6, 6, 5, 5, 5, 8, 7, 9

Calcule la media aritmética, la moda y la mediana de cada uno de los grupos.

En un centro de salud privado de la ciudad de la vega, las urgencias diarias atendidas durante el mes de Abril fueron:

4, 3, 2, 1, 5, 8, 1, 5, 3, 3, 7, 6, 6, 4, 2, 7, 3, 2, 4, 6, 8, 3, 2, 4, 3, 5, 1, 2, 1, 5, 3, 8.

Calcule la media aritmética, la moda y la mediana.

Probabilidad.

Las caras de un dado están numeradas del 1 al 6. Hallar la probabilidad de que al lanzar el dado la suma de los números de las caras visibles sea múltiplo de 5.

Una caja contiene 100 cuadrados numerados de la siguiente forma: 00, 01, 02, ..., 99. Se saca un cuadrado al azar. Calcular la probabilidad de que los dos números que aparecen en el cuadrado sean impares. Utilizando la siguiente formula.

$$P(A) = \frac{Casos\ favorables(x)}{Total\ de\ casos\ posibles(n)}$$

Un estudiante tiene en un librero 4 libros de Matemáticas y 6 de Física Si se cogen 2 libros al azar, ¿cuál es la probabilidad de que ambos sean de la misma asignatura?

Juan tiene una rifa donde hay 100 números y María ha comprado 2 de estos números. Pensando de forma objetiva contesta las siguientes preguntas:

Si en la rifa hay un sólo premio, ¿qué probabilidad tiene de conseguirlo?

Si en la rifa hay dos premios: ¿qué probabilidad tiene de conseguir los dos?

Lanzamos un dado. Calcula la probabilidad de que:

Salga un número primo.

Salga un número mayor que cuatro.

Salga un número menor o igual que cuatro.

El número de empleados de 38 hoteles de un país viene dado por la siguiente serie:

{35, 52, 40, 23, 74, 33, 61, 23, 44, 53, 23, 70, 68, 71, 43, 35, 23, 28, 43, 52, 60, 28, 38, 43, 52, 71, 48, 72, 28, 33, 52, 19, 21, 35, 55,68, 44, 71}

Construir la tabla de distribución de frecuencias para datos agrupados y calcular:

La moda

La media

La mediana

Para ir de Santo Domingo a la Vega hay 3 maneras: carro, motor o guagua. Para ir de la Vega a Santiago hay 4 maneras: motor, guagua, carro o burro. ¿De cuántas maneras diferentes puede ir una persona de Santo Domingo hasta Santiago, pasando por la Vega? Construye un diagrama de árbol para verificar la respuesta.

EJERCICIOS DE AUTOEVALUACIÓN DE LA UNIDAD VII

Encierra en un círculo la letra de la respuesta correcta

1. María va la tienda y compra 5 productos de belleza los cuales tiene los siguientes precios, \$50.5, \$50.6, \$50.8, \$50. 9, \$50.7. ¿Cuál es la mediana de los precios de los productos de belleza?
   a) *Me*=\$50.7
   b) *Me*=\$50.6
   c) *Me*=\$50.9
   d) *Me*=\$50.5

2. Juan está en una clase de inglés todos los sábados, todas las semanas tiene una nota, al cabo de tres meses tendrá que sacar su promedio trimestral, las notas obtenidas durante las 12 semanas son las siguientes: 45, 50, 60, 50, 60, 47, 60, 70, 60, 57, 65, 45. La moda de las notas de Juan es:
   a) *Mo*=50
   b) *Mo*=60
   c) *Mo*=70
   d) *Mo*=45

3. La medida de centralización que se obtiene al sumar todos los datos y dividir el resultado entre la cantidad de miembros es:
   a) Mediana.
   b) Moda.
   c) Media aritmética.

4. Cuándo el número de datos es par la mediana se calcula:
   a) Sumando los dos miembros del centro y dividiendo entre dos.
   b) Sumando todos sus miembros y dividiendo entre dos.
   c) Sumando todos sus miembros y dividiendo entre el número de datos.

5. El número de eventos del espacio muestral de lanzar un dado y una moneda al mismo tiempo es:
   a) 36
   b) 12
   c) 6
   d) 24

6. En una tómbola hay 3 bolas rojas, 2 bolas amarillas y 7 bolas azules. La probabilidad de sacar una bola azul es:
   a) P(azul)=50%
   b) P(azul)=83.5%
   c) P(azul)=58.3%
   d) P(azul)=5.8%

7. La probabilidad de que un evento ocurra con certeza viene dada por un numero entre:
   a) 1 y 50
   b) 0 y 100
   c) 0 y 1
   d) 1 y 100

8. Si se lanzan 2 monedas al aire, la probabilidad de que salga al menos una cara es:
   a) P(c)=25%
   b) P(c)=75%
   c) P(c) =100%
   d) P(c)=60%

9) Al lanzar un dado al aire, la probabilidad de que salga el dos es:

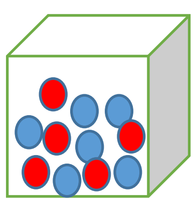
a)P(2)=$\frac{2}{6}$

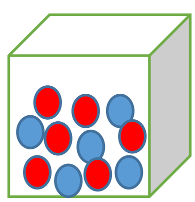
b)P(2)= $\frac{1}{6}$

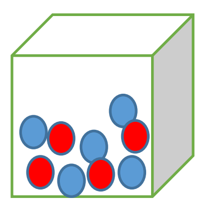
c) P (2) =0.2

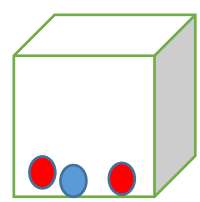
d) P (2) =1

10) ¿De cuál de las siguientes cajas es más probable sacar una bola roja?

a) 

b) 

c) 

d) 

BIBLIOGRAFÍA DE LA UNIDAD VII

1. Custodio, C. (2007). Estadística Básica (Cuarta edición) Editora Búo. República Dominicana.
2. De Jesús, M. (2008). Matemática 1. Primer ciclo, secundaria. Editorial actualidad. República Dominicana.
3. Flores Salazar, J. V. (2000). Matemática 2 (1ra edición) Editorial Santillana. República Dominicana.
4. Flores Medrano, E. (2014). Matemática 6. Editorial Actualidad. República Dominicana.
5. Medidas de tendencia central. (2015). Recuperado el 12 de noviembre de 2019, de https://www.ditutor.com/estadistica/medidas_centralizacion.html.
6. Rosario Peña, L. (sf). Guía didáctica Fundamento de Estadística. Santo Domingo.
7. Zorrilla, G. (2000). Refuerza tus Conocimientos Previos en Matemática para 4to de Media. Ediciones Zorrilla, SRL. República Dominicana.

RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS DE AUTOEVALUACIÓN UNIDAD I

Respuestas a los problemas de autoevaluación de la unidad I.

1. e
2. b
3. c
4. d
5. d

RESPUESTAS DE AUTOEVALUACION
UNIDAD II

Respuestas de los ejercicios de autoevaluación de la unidad II.

1. a
2. d
3. c
4. d
5. d
6. c
7. a
8. a
9. d

RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS DE AUTOEVALUACIÓN III

Respuestas de los ejercicios de autoevaluación de la unidad IV

1. b
2. d
3. d
4. a
5. d
6. c
7. b
8. c
9. b
10. d

RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS DE AUTOEVALUACIÓN UNIDAD IV

Respuestas de los ejercicios de autoevaluación de la unidad IV

1. b
2. a
3. c
4. a
5. c
6. c
7. b
8. a
9. b
10. a

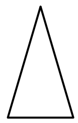
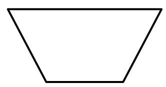
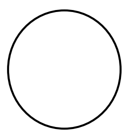
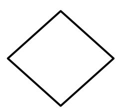
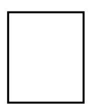
RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS DE AUTOEVALUACIÓN UNIDAD V

Respuestas de los ejercicios de autoevaluación de la Unidad V

I.

1. a
2. a
3. b
4. c
5. c
6. c
7. b

II.

Figura	Fórmula
	$A = b\ x\ h$
	$A = \frac{\mathrm{b\ x\ h}}{2}$
	$\boldsymbol{A} = \frac{\mathrm{h(B + b)}}{2}$
	$\mathrm{A}=\pi\ \mathrm{r}^2$
	$\mathrm{A} = \frac{\mathrm{D\ x\ d}}{2}$
	$\mathrm{A}=\mathrm{L}^2$

III.

A. 12 cm^2
B. 49 cm^2
C. 54 cm^2
D. 50.24 cm^2

RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS DE AUTOEVALUACIÓN UNIDAD VI

Respuestas de los ejercicios de autoevaluación de la unidad VI

1. c
2. d
3. a
4. b
5. c
6. a
7. a

RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS DE AUTOEVALUACIÓN UNIDAD VII

Respuestas a los ejercicios de autoevaluación

Respuestas de los ejercicios de autoevaluación de la unidad VII

1. a
2. b
3. c
4. a
5. b
6. c
7. c
8. b
9. b
10. d

Bibliografía General

1. (Anónimo) (s.f) Funciones trigonométricas. Extraída desde https://es.slideshare.net/memolibre/ngulos-verticales Fecha de acceso 11/11/2019.
2. Arjona, A. H. (2002). Teoría de Conjuntos. En A. H. Arjona, Teoría de Conjuntos. mara@usal.es.
3. Baldor, A. (2000). Precálculo: Algebra, Geometría analítica y Trigonometría. Editorial Limusa. México.
4. Barwise, J. (1977). Libro de Mano de Matemática Lógica, North Holland, Ámsterdam.
5. Castillo, C. I. (s.f.). Lógica y Teoría de Conjuntos. En C. I. Castillo, Lógica y teoría de conjuntos.
6. Cheifetz Y Avenoso F. (1974). Lógica y Teoría de Conjuntos. Editora Alhambra
7. Clasificación De Polinomios. Recuperado el 20 de septiembre del 2019 de https://www.clasificacionde.org/clasificacion-de-polinomios/.
8. Costa, A. &Buser, P. (2010). Curso de Geometría Básica. UNED. Sanz y Torres. Primera Edición. Madrid, España.
9. Custodio, C. (2007). Estadística Básica (Cuarta edición) Editora Búo. República Dominicana.
10. De Jesús, M. (2008). Matemática 1. Primer ciclo, secundaria. Editorial actualidad. República Dominicana.
11. Diferencia entre Método Deductivo e Inductivo. Recuperado el 21/09/ 2019 de https://difiere.com/metodo-inductivo-y-deductivo/.
12. Expresiones Algebraicas. Recuperado el 20 de septiembre del 2019 de https://conceptodefinicion.de/expresiones-algebraicas/.

13. Fernández, V. (2004). Teoría básica de conjuntos, Editora Anaya Educación
14. Flores Medrano, E. (2014). Matemática 6. Editorial Actualidad. República Dominicana.
15. Flores Salazar, J. V. (2000). Matemática 2 (1ra edición) Editorial Santillana. República Dominicana.
16. Franco, J. R. (2005). Fundamentos de Matemáticas. En J. R. Franco, Fundamentos de Matemáticas (pág. 195). México: FCA.
17. Geraldino, R. P. (2014). Matemática 1 educación media. En R. P. Geraldino, Matemática 1 educación media. Impretur SRL.
18. Gómez, N. (2017). Matemática del nivel primario. En N. G. López, Matemática del nivel primario. Santiago: Ediciones UAPA.
19. Gómez, N. (2016). Matemática en la Educación Primaria II. Edición 2. República Dominicana.
20. Gómez, N. (2016). Matemática en la educación primaria. Ediciones UAPA. Santiago de los Caballeros, República Dominicana.
21. Gómez, N. (2019). Algebra y Geometría. Ediciones UAPA. Santiago de los Caballeros, República Dominicana.
22. Gonzáles, D. (2011). Algebra Básica Teoría y Práctica. Segunda Edición. Impresiones Montenegro, Perú.
23. Hamilton, A. G. (1981). Lógica para Matemáticos, Paraninfo, Madrid, España.
24. Hay Tipo. (s.f.). Hay Tipo. Recuperado el 15 de noviembre de 2019, de https://haytipos.com/conjuntos/
25. https://ejerciciosresueltos.net/geometria/triangulos/ejercicios-de-triangulos. Recuperado 08/11/2019.
26. https://www.ditutor.com/geometria/triangulo.html. Recuperado 23/10/2019.
27. https://www.ecured.cu/Cuadrado. Recuperado 24/10/2019.

28. Izquierdo, Fernando. P (2012). Geometría Descriptiva superior y aplicada. Edición 24°. México.
29. Juárez, J. (2009) Matemática III pág. 189
30. Kleene, S. C. (1974). Introducción a la Metamatemática, Tecnos, Madrid.
31. Lógica Matemática https://brainly.lat/tarea/2740631 Fecha de acceso 22/11/2019.
32. Matemática para la Educación media Pág. 126.
33. Matemática en la Educación primaria II República Dominicana Pág. 264, 265.
34. Marks, Robert W (1967). Iníciese en la teoría de conjuntos (algebra moderna). Marcombo.
35. Matemática Educación Básica. (2009) Grado 7mo. Editores: Equipo Didáctico -Técnico de Susaeta Ediciones. República Dominicana.
36. Matemática Educación Media. (2011) Grado 2do. Ediciones SM. República Dominicana.
37. Medidas de tendencia central. (2015). Recuperado el 12 de noviembre de 2019, de https://www.ditutor.com/estadistica/medidas_centralizacion.html.
38. Morales, E. (2019) Álgebra Superior I. Ediciones UAPA. Santiago.
39. Mosterín, J. (1970). Lógica de Primer Orden, Ariel, Barcelona, España.
40. Ojeda. E. (2006). Matemática. Ediciones COREFO SAC. Lima. Perú.
41. Olivos J. (2016). Razonamiento Inductivo – Deductivo. Teoría y práctica.
42. Parraguez, J. y Parraguez O. (s.f.) Los ángulos verticales. Extraído desde https://es.slideshare.net/memolibre/ngulos-verticales Fecha de acceso 11/11/2019.
43. Peña, R. (2004) Matemática Básica Superior. pág. 115, 116.
44. Peña, R. (2004-2008). Matemática IV educación media página 359. República Dominicana.

45. Peña, R. (2010). Matemática 2. Educación Media. Ediciones Susaeta. Santo Domingo. República Dominicana.
46. Peña, R. (2014). Matemática 4 –Nivel Medio. Susaeta Ediciones 2010. Printed in Dominican Republic (Editora Imprentur, S, R, L.
47. Peña, R. (2017) Matemática Educación Básica Grado 7 pág. 128.
48. Peña, R. (2018). Matemática 1 –Nivel Medio. Susaeta Ediciones 2010. Printed in Dominican Republic (Editora Imprentur, S, R, L.
49. Peña, R. (2018). Matemática 2 –Nivel Medio. Susaeta Ediciones 2010. Printed in Dominican Republic (Editora Imprentur, S, R, L.
50. Peña, R. (fecha). Matemática educación media. Basado en transformaciones curricular de la educación nacional, capítulo I (quinta edición del siglo XXI) República Dominicana.
51. Pérez, V. (2010). La guía (matemática) la historia general de la trigonometría. Extraído desde https://matemática.laguia2000.com/general/historia-de-la-trigonometria. Fecha de acceso 12/11/2019
52. Povis A. (2015). Razonamiento Matemático. Perú.
53. Problemas Propuestos. Recuperado el 13/10/2019 de http://profe-alexz.blogspot.com/2011/03/razonamiento-deductivo-8-ejercicios.html
54. Razonamiento Inductivo y Deductivo. Recuperado el 20/09/2019 de https://www.monografias.com/trabajos-pdf5/razonamientos-deductivos-e-inductivos/razonamientos-deductivos-e-inductivos.shtml.
55. Razonamiento Lógico Matemático http://razonamiento-logico-problemas.blogspot.com/2013/02/test-02-razonamiento-logico-matematico.html Fecha de acceso 22/11/2019.
56. Razonamiento Lógico, Lógica Matemática https://razonamiento-logico.webnode.es/logica-matemática/ Fecha de acceso 22/11/2019.
57. Rodríguez, I. Javier. P (1963). Geometría Descriptiva. Tamo ll. México

58. Rosario Peña, L. (sf). Guía didáctica Fundamento de Estadística. Santo Domingo.
59. Santana, J y Gutiérrez A R. D
60. Sullivan, M. (2006). Álgebra y Trigonometría Educación media superior. Séptima edición. Pearson Educación de México, S.A. de C.V, México.
61. Sullivan, M. (2013). Álgebra y Trigonometría Educación media superior. Novena Edición. Pearson Educación de México, S.A. de C.V, México.
62. Zorrilla, G. (2000). Refuerza tus Conocimientos Previos en Matemática para 4to de Media. Ediciones Zorrilla, SRL. República Dominicana.

Primera Edición.

Santiago de los Caballeros, República Dominicana.

Año 2019.